

用改进的 Weibull 方法分析纤维强度的长度效应

李海斌 阳建红 石增强 郭明映

(第二炮兵工程学院,西安 710025)

摘 要 为了描述纤维强度与长度的关系,采用改进的 Weibull 统计方法对不同长度纤维的强度数据进行了处理。该方法有效地利用实验数据,将不同标距下的实验结果统一处理,并采用迭代步骤求取 Weibull 参数。由于将长度和拉应力作为统计参数,得到的纤维断裂失效函数综合反映了纤维长度和拉伸应力对失效概率的影响,更好地描述了强度与长度的分散关系。通过对芳纶 APMOC 和 PBO 的单丝拉伸实验验证了改进统计方法的优越性。

关键词 Weibull 分布,强度,长度,迭代,形状参数

Length Effect of Fiber's Strength Analyzed by Modified Weibull Method

Li Haibin Yang Jianhong Shi Zengqiang Guo Mingying

(Second Artillery Engineering Institute, Xi'an 710025)

Abstract In order to describe the relationship between fiber's strength and length, a modified weibull statistical method was used to handle the strength data of different length. This method made use of the experimental results of different gauge length effectively and uniformly. The weibull parameters were obtained by iterative step. Because it took length and tensile stress as statistical parameter, the breakage failure function attained reflected the effect of the length and tensile stress on fiber's failure probability comprehensively and characterized the dispersal relationship between fiber's strength and length preferably. The APMOC and PBO's monofilament test verified the advantage of the modification.

Key words Weibull distribution, Strength, Length, Iterative, Shape parameter

1 引言

纤维复合材料的宏观强度通常取决于纤维的强度,而纤维强度与长度之间存在着内在联系。根据最弱链理论,纤维长度越大,暴露的缺陷越多,其强度越低,可以用 Weibull 分布来描述纤维强度与长度之间的相互关系^[1~3]。在进行纤维强度的统计描述时,采用不同长度(一般采用四个长度)的单纤维拉伸实验并通过最小二乘法,最大似然估计法等获得 Weibull 统计参数^[4~6],这一方法虽然在一定程度上能够反映纤维强度与长度的关系,但是不同长度下求得的 Weibull 形状参数并不相同^[7],因此不能对实验长度范围以外的纤维强度进行描述,而且在数据处理时,各长度分别处理,也没有有效的利用所得实验数据。因此需要能对不同长度纤维进行统一处理的统计方法。文献[8]采用迭代方法对具有不同长度的样本

进行统一处理,但并未对收敛性进行合理解释。本文在此基础上将纤维强度的 Weibull 统计方法进行改进,并对迭代的收敛性进行说明。

2 纤维强度的 Weibull 分布规律

纤维的破坏概率服从 Weibull 分布,表示为^[9]:

$$P(\sigma_f) = 1 - \exp\left[-L\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^\beta\right] \quad (1)$$

式中, $P(\sigma_f)$ 为纤维在应力水平 $\leq \sigma_f$ 下的破坏概率, L 为关于某一参考长度 l_0 的长度比, $L=l/l_0$, σ_0 为尺度参数, β 为形状参数,它们均为材料常数,通常由实验确定。由(1)式知,当 $\sigma_f \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ 时, $P(\sigma_f) = 1$;当 $\sigma_f \rightarrow 0$, $L \rightarrow 0$ 时, $P(\sigma_f) = 0$ 。

概率分布密度函数为:

$$f(\sigma_f) = \frac{dP(\sigma_f)}{d\sigma_f} = \beta \cdot \frac{L \cdot \sigma_f^{\beta-1}}{\sigma_0^\beta} \cdot \exp\left[-\left(\frac{\sigma_f}{\sigma_0}\right)^\beta\right] \quad (2)$$

收稿日期:2008-11-27

基金项目:"十一五"预研项目(51328040106)

作者简介:李海斌,1979年出生,博士研究生,研究方向为导弹武器发射系统生存技术研究。E-mail:lhblhb_0@sina.com

数学期望为:

$$\bar{\sigma}_f = E[\sigma_f] = \int_0^{\infty} \sigma_f f(\sigma_f) d\sigma_f = \sigma_0 L^{-\nu\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \quad (3)$$

把同一标距条件下实验所得的单丝强度数据由小到大排列,这样实测破坏概率期望值为:

$$P(\sigma_f) = \frac{i}{N_i + 1} \quad (4)$$

式中, N_i 为某一标距 l 下所测单纤维的总根数, i 为在拉伸应力 σ_f 下断裂的纤维根数。

对(1)式取双对数,得:

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] = \beta \ln \sigma_f - \beta \ln \sigma_0 + \ln L \quad (5)$$

在 $L=1$ 时,将 $\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right]$ 对 $\ln \sigma_f$ 作图,即可得到 β 和 σ_0 。但这样求得的参数只适于在该实验标距下,也只能得到在该标距下纤维断裂的概率分布函数。其原因在于,每次进行数据处理时,都是将当前标距作为参考长度,总有 $L=1$,而实际纤维强度与长度的关系正是通过 L 值的变化来反映的。

3 Weibull 分布数据统计方法的改进

3.1 分布参数的迭代求解

传统数据处理方法,不能综合反映纤维长度及拉伸应力的影响,需要改进。

在(1)式中,令

$$\sigma = \sigma_f L^{1/\beta} \quad (6)$$

统计参数 σ 反映了纤维长度与拉伸应力对其断裂概率的综合影响。

则式(5)最终化为:

$$y = \beta x + \alpha \quad (7)$$

式中:

$$x_i = \ln(\sigma_i) \quad (8a)$$

$$y_i = \ln \left[\frac{\ln L}{1 - P_i(\sigma_f)} \right] \quad (8b)$$

$$P_i(\sigma_f) = \frac{i}{N + 1} \quad (8c)$$

N 为总的测试次数, $N = \sum N_i$, $P_i(\sigma_f)$ 为在整个测试过程中的断裂概率。对式(7)中的 y 和 x 作图得到 Weibull 分布参数。这样将不同长度下的实验数据进行统一处理,求得的参数能综合反映纤维长度和拉伸应力的影响。

在得到 σ 时,在式(7)中先要用到 β 值,该值可以任意给定或者利用在 $L=1$ 时求得的值通过迭代的方法求得。具体步骤如下^[8]:

(1)任意给定 β ,求 σ ;

(2)根据式(7)求迭代值 β' 和 α ;

(3)给定某一收敛常数,若 $|\beta' - \beta| <$ 给定值,则步骤2求得的参数即为所求参数,否则令 $\beta = \beta'$,重复步骤1,直到收敛。

3.2 迭代过程的收敛性

上述迭代过程能很快达到收敛,若在某步迭代过程中采用参数 β' ,则(7)式为:

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] = \beta \ln \sigma_f + \frac{\beta}{\beta'} \ln L - \beta \ln \sigma_0 \quad (9)$$

式中, β' 值的变化只能影响直线的截距,不管其值如何选择, $\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] \rightarrow \ln \sigma_f$ 的斜率关系 β 总是确定的,因此总能得到收敛的 β 值。(9)式写成:

$$\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] = \beta \ln \sigma_f L^{1/\beta'} - \beta \ln \sigma_0 \quad (10)$$

(9)式、(10)式为同一方程,对 $\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] \rightarrow \ln \sigma_f L^{1/\beta'}$ 作图同样能得到收敛的 β 值,但在最初收敛步内由于 β' 值与真实值的偏差,会造成下一步作图求得的 β 值与真实值的偏差,但这种偏差会越来越小,一般迭代3~5步便能收敛,取决于初始给定 β 值的大小,建议采用与最终真实值相近的值,由于 β 值反映材料特性,不同长度下 $L=1$ 求得的 β 是相近的,它与最终求得的参数值亦相近,可以任取其中一个作为初始值。

3.3 改进前后的比较

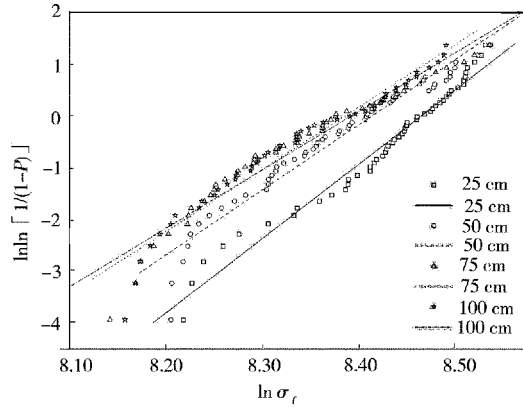
芳纶纤维的断裂失效服从 Weibull 分布^[3],对杂环芳纶 APMOC 及 PBO 用 GMT2103 电子拉伸机上按 GB3915—2003 在标距 l 为 25、50、75、100 mm 下进行单丝拉伸实验。对拉伸数据剔除粗大误差后取有效试件 50 根。按 $L=1$ 求得 $\ln \ln \left[\frac{1}{1 - P(\sigma_f)} \right] \rightarrow \ln \sigma_f$ 的函数关系(图1)。可以看出纤维平均强度随长度增加向低端移动,但同种纤维四条直线的斜率 β 并不相同,因此不能对不同长度下纤维失效概率进行统一描述。

以标距 $l=25$ mm 作为参考长度 l_0 ,则长度比 L 分别为 1、2、3、4,将数据按照改进后的 Weibull 统计方法得到双对数函数关系见图2。改进后数据更加集中于直线附近。图中横坐标综合了长度及拉伸应力对纤维失效概率的影响。

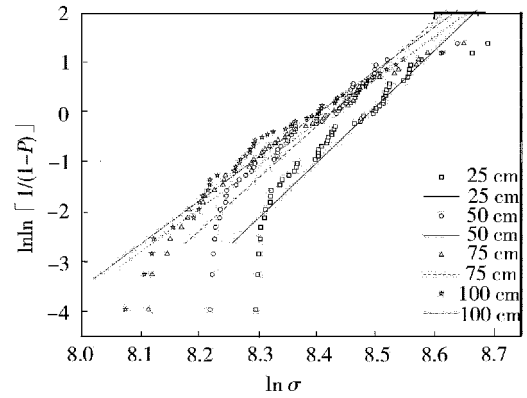
上述过程在求取 Weibull 参数皆以标距为 25 mm,取 $L=1$ 时求得的值为初始值,迭代分别进行 3 步和 4 步达到收敛。得到分布参数后,通过改变 L 值可以对其他长度纤维的平均强度按(3)式进行计算。

从表1可以发现,不同长度单独处理时,形状参数 β 变化的趋势是随长度增加而减小。 β 值越小,强度分布的范围越宽,方差越大。纤维标距越长, β 越

小,强度分散性越大。对于 APMOC,改进后得到的 β 值大于标距为 75 和 100 mm 得到的参数,说明强度数据描述具有更小的分散性,而其值又小于标距为 25 mm 得到的数据,这样 β 介于不同标距得到的参数之间,说明 β 反映了不同长度的影响。PBO 的最终 β 亦介于不同标距得到的值之间。



(a) APMOC

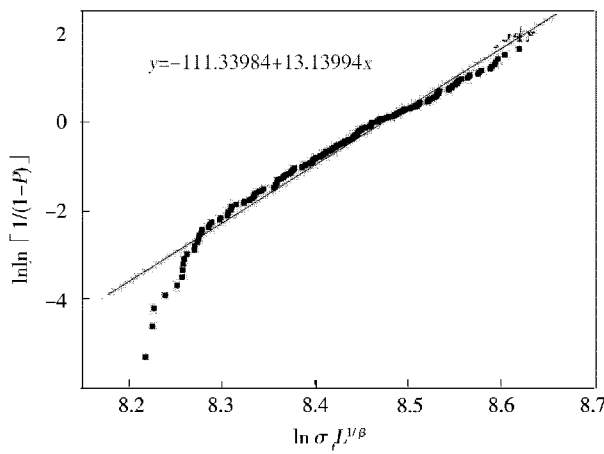


(b) PBO

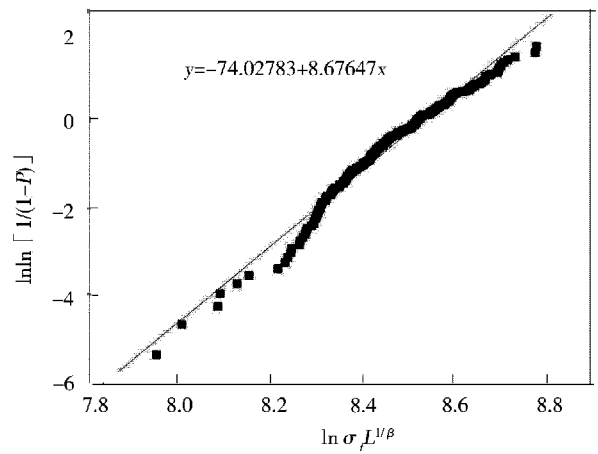
图 1 单独处理时的双对数函数图

Fig. 1 Double logarithmic function attained separately

表 1 中由未改进方法求得的均值均小于实际值,而改进方法理论值在短标距时,高于实际值,长标距时小于实际值,说明所得 Weibull 函数关系很好反映了纤维强度随长度衰减的变化关系。



(a) APMOC



(b) PBO

图 2 统一处理时的双对数函数

Fig. 2 Double logarithmic function attained uniformly

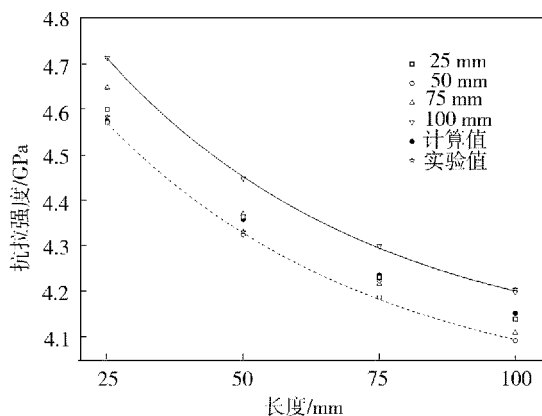
表 1 Weibull 统计方法改进前后的参数比较

Tab. 1 Weibull parameters before and after modification

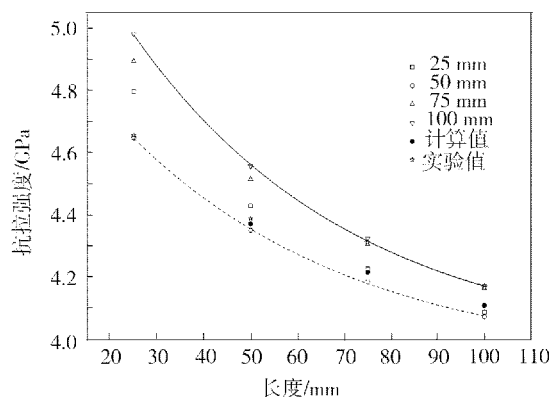
纤维类型	长度/mm	单独处理的 Weibull 参数(L=1)				改进后的 Weibull 参数(L=1,2,3,4)				
		β	实验值/GPa	计算均值/GPa	实际均值/GPa	β	计算值/GPa	统一均值/GPa	理论值/GPa	偏差 ¹⁾ /%
APMOC	25	14.30	4.746	4.576	4.582	13.14	4.786	4.601	4.601	0.42
	50	12.52	4.507	4.326	4.332				4.365	0.76
	75	11.24	4.411	4.217	4.222				4.232	0.23
	100	11.98	4.383	4.200	4.205				4.160	-1.06
PBO	25	11.21	4.866	4.651	4.656	8.677	5.075	4.798	4.748	1.97
	50	10.50	4.564	4.351	4.389				4.429	0.92
	75	8.606	4.558	4.307	4.313				4.227	-1.99
	100	7.784	4.432	4.168	4.173				4.009	-1.77

注:1)偏差=(理论值-实际均值)/实际均值。

将在不同标距下得到的参数按照(3)式分别计算其他长度下的纤维强度并与改进统计方法后的计算结果相比较,绘于图3中。



(a) APMOC



(b) PBO

图3 不同长度下纤维平均强度的计算值

Fig.3 Calculated mean strength value of different length

从图3(a)可以发现,按照各自标距为参考长度计算当前标距的强度平均值较实验略小,但由此计算其他长度下的平均强度则与实验结果出现较大偏离,以100 mm为参考长度计算其他长度的平均值均大于实际值,而50 mm为参考长度时计算值又小于实际值。总体表现为计算比当前长度小的强度数据时,结果偏大,反之偏高,而计算当前标距临近长度范围内的结果普遍较好,原因在于统计时都只考虑了当前标距长度,统计过程只充分考虑了当前标距范围内的数据信息,因此不能有效反映其他长度对纤维强度的

影响。改进方法得到的计算值与实际值吻合较好,但它与以25 mm作标距,取 $L=1$ 计算得到的结果也相差不大。因为两次统计都选择25 mm作参考长度,以致得到的Weibull参数相近,说明统计结果也受参考长度选择的影响。对PBO纤维,结果相似。

4 结论

(1)传统的处理方法在不同标距下得到的Weibull参数不同,不能得到纤维统一的断裂分布函数;

(2)改进方法将不同标距下的实验结果统一处理,并以长度和拉应力作为统计参数,能得到统一的纤维断裂失效函数,由于有效的利用了实验数据,能更好的描述纤维长度及拉伸应力对失效概率的影响;

(3)传统方法只适合计算在当前标距下的平均强度,改进后的处理方法能够较好的对实验以外不同长度纤维的平均强度进行计算。更好的描述了强度与长度之间的分散关系。

参考文献

- 1 范赋群,曾庆敦.复合材料的统计断裂理论.力学与实践,2000;22(2):1~5
- 2 Zhang Yuping, Wang Xuegai, Pan Ning et al. Weibull analysis of the tensile behavior of fibers with irregular geometricalities. Journal of Materials Science, 2002; 37: 1 401 ~ 1 406
- 3 马春杰,宁荣昌,李琳等.用Weibull方法评价化学介质对PBO纤维统计强度的影响.复合材料学报,2005;22(3):16~20
- 4 Bergman B. Estimation of Weibull parameters using a weight function. Journal of Materials Science Letters, 1986; 5: 611 4
- 5 Faucher B, Tyson R. On the determination of Weibull parameters. Journal of Materials Science Letters, 1988; 7: 1 199 ~ 1 203
- 6 Barbero E, Fernández-Sáez J, Navarro C. Statistical analysis of the mechanical properties of composite materials. Composites: Part B, 2000; 31: 375 ~ 381
- 7 Gurvich M R, Dibeneditto A T. Evaluation of the statistical parameters of a Weibull distribution. Journal of Materials Science, 1997; 32: 3 711 ~ 3 716
- 8 曾庆敦.复合材料的细观破坏机制与强度.北京:科学出版社,2002:55~57

(编辑 吴坚)