

模态法辨识针刺 C/C 复合材料弹性模量

严博燕 侯 晓 陈 慧 刘 芹

(西安航天动力技术研究所,西安 710025)

文 摘 针对传统方法测量 C/C 复合材料弹性模量精度差问题,提出了一种利用模态试验辨识材料弹性模量的新方法。数值仿真结果表明板件材料振动频率与弹性模量之间存在模糊对应关系,利用此关系采用二分法及二阶响应面近似模型对材料弹性模量进行辨识,并分别利用各向同性薄壁板件及正交各向异性薄壁板件对此方法进行验证,计算结果误差最大为 16.67%,最小仅为 0.5%,表明该方法准确有效。最后将其应用于针刺 C/C 复合材料,获得了其弹性模量。仿真及试验结果均表明该方法无损、高效且准确度高。

关键词 针刺 C/C 复合材料,弹性模量,模态试验,有限元数值模拟,二阶响应面模型

中图分类号:V45

DOI:10.3969/j.issn.1007-2330.2014.03.005

Inverse Method Based on Modal Test for Characterizing C/C Material Elastic Constants

YAN Boyan HOU Xiao CHEN Hui LIU Qin

(Xi'an Institute of Aerospace Solid Propulsion Technology, Xi'an 710025)

Abstract In order to solve the problem of poor precision for measuring C/C composite elastic constant by traditional test method, the present paper provided a new method for obtaining the main elastic constants from modal test. According to the modal test data and the relationship between vibration frequencies and elastic constant, the scope of the elastic constants were estimated preliminarily. Then the quadratic response surface approximate model about elastic constants and vibration frequencies was established to optimize the elastic constants. The isotropic and orthotropic thin plates were used to verify this method. The results show that the maximum error is 16.67%, the minimum is only 0.5%, so the method is accurate and effective. At last, the elastic constant of needled C/C composite is obtained through the present method. The simulation and experimental results proved that the method is nondestructive, efficient and accurate.

Key words Needled C/C composite, Elastic constants, Modal Test, Finite element numerical simulation, Quadratic response surface approximate model

0 引言

工程上获得材料弹性模量的传统方法多为为静态拉伸与扭转试验。传统方法测试复合材料性能参数时,由于复合材料多为各向异性或正交各向异性,材料均匀性较差,故需多个试验样本且试验结果往往为局部特性而与整体性能参数差距较大。有必要通过寻求其他新方法获得更为理想的结果。

材料的弹性模量在结构的振动行为上起着重要作用。在平板上作用一诱导力使其产生振动,其振动特性将只与平板的几何尺寸、密度、边界条件和弹性模量有关。若已知平板的几何尺寸、密度和边界条件,其振动特性将由弹性模量唯一确定。这使得利用动力学法反推材料弹性模量成为可能^[1]。F. Forster

最先利用模态法反推得到了横梁结构的弹性模量^[2],随后 Marco Alfano 利用 Warburton 方程求得了各向同性薄板材料弹性模量^[3],Sol 等人提出了正交各向异性材料弹性模量的获得方法^[4]。以上方法均基于振动基本方程,利用横梁或薄壁板件振动方程中频率与弹性模量的关系进行推导计算,进而获得材料弹性模量。然而以上方法共同缺点是所选模型假设条件较多且关系复杂,需作大量近似,误差相对较大。随着计算机技术的发展,有限元数值模拟与现代优化算法在该领域得到了广泛应用,Cugnoni、林玉华等人^[5-6]先后利用基因遗传算法对多种材料弹性模量确定进行了优化计算,获得了较好的结果。该方法对材料要求较低,适用性好,不仅局限于薄壁板件,对厚

收稿日期:2013-12-24

作者简介:严博燕,1988 年出生,助理工程师,主要从事发动机喷管设计。E-mail: boyyan0115@163.com

板材料亦适用。但缺点是可控性较差,计算量偏大。

本文结合以上两种思想的优点,利用复合材料平板结构,通过模态试验获得全自由边界条件下试件振型及其对应频率,利用低阶模态对应的频率与部分弹性模量之间的关系对弹性模量进行初步优化以确定弹性模量范围,在此基础上建立其与对应频率的二阶响应面近似模型,对弹性模量进行精细优化,并将其

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2(D_x \nu_{yx} + 2D_h) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q \quad (1)$$

式中: $D_x = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$; $D_y = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$; $D_x \nu_{yx} = D_y \nu_{xy}$; $D_h = \frac{G_{xy} h^3}{12}$ 。

利用梁函数组合法可求取边界条件的正交异性矩形板的固有频率。现取一项梁函数组合的振型表达式,如式(2)所示。

$$f_{mn}(x, y) = A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2)$$

$$f_{mn} = \frac{1}{b^2 \sqrt{\rho h}} \sqrt{A_m D_x \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 (K_{mn} D_x \nu_{yx} + 2L_{mn} D_h) + B_n D_y} \quad (3)$$

整理可得:

$$\frac{12b^4 \rho f_{mn}^2}{h^2} = \frac{A_m \left(\frac{b}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{b}{a}\right)^2 K_{mn} \nu_{yx}}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} E_x + \frac{B_n}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} E_y + 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 L_{mn} G_{xy} \quad (4)$$

由式(4)可知正交各向异性板件与弹性模量之间的关系。然而这一公式较为近似,仅依靠此式不足以精确求出弹性模量。

对矩形板进行有限元模拟,逐个改变弹性模量值,观察频率值的变化,发现 G_{xy} 对 f_{11} 有显著影响; E_x 对 f_{20} 有显著影响; E_y 对 f_{02} 有显著影响。即 $L_{11} \gg B_1, A_1 + K_{11}; A_2 + K_{20} \gg B_0, L_{20}; B_2 \gg A_0 + K_{02}, L_{02}$

故可以利用式(5)及 f_{11}, f_{20}, f_{02} , 采用二分法缩小弹性模量的范围。

$$\left| \frac{f_i - f_{i0}}{f_{i0}} \times 100\% \right| \leq 5\% \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

式中, f_i 为数值模拟获得频率值, f_{i0} 为试验获得频率值, i 取 1、2、3 分别代表模态 (1,1)、(2,0)、(0,2)。

在此基础上建立弹性模量与对应频率的二阶响应面模型,对弹性模量在小范围内进行精细优化。

1.2 优化模型的建立

在自变量的某一区域内,采用低阶的多项式进行响应面拟合。二阶多项式构造响应面模型^[7] 如式(6)所示

$$\tilde{Y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^m \beta_i x_i + \sum_{i=1}^m \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \beta_{ij} x_i x_j \quad (6)$$

式中, $\beta_0, \beta_i, \beta_{ii}, \beta_{ij}$ 为待定系数, m 为设计变量个数。

其多元线性回归处理的形式为:

$$\tilde{Y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i v_i \quad (7)$$

式中, p 为式(7)中除常数项外的所有项数, p 与设计

应用于针刺 C/C 复合材料辨识其弹性模量。

1 理论与建模方法

1.1 振动模型的建立

若板件由正交各向异性材料构成,且弹性主方向沿着板件的坐标轴 x, y, z , 则其振动基本方程如式(1)所示。

代入正交异性板的变分方程,可求得适用于各种边界条件正交异性矩形板各阶频率的统一解析表达式,如式(3)所示。

变量个数 m 的关系为:

$$p = 2m + m(m - 1)/2 \quad (8)$$

利用 $n (n \geq p + 1)$ 组方案的试验数据 $(\tilde{Y}; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_p)_k (k = 1, 2, \dots, n)$, 求出待定系数 $\beta_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 。当设计矩阵 V 的秩 $\geq p + 1$ 时, $V^T V$ 为非奇异阵, β 的最小二乘估计为:

$$\hat{\beta} = (V^T V)^{-1} V^T Y \quad (9)$$

$$\text{式中, } V = \begin{bmatrix} 1 & \nu_{11} & \nu_{12} & \dots & \nu_{1p} \\ 1 & \nu_{21} & \nu_{22} & \dots & \nu_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_p \end{bmatrix}$$

若每组设计变量对应多个状态变量,模型扩展为:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1q} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{p1} & \beta_{p2} & \dots & \beta_{pq} \end{bmatrix}$$

式中, q 为每组设计变量对应的状态变量数。

文中采用正交试验设计理论对初始撒点的设计变量进行设计。利用式(9)编程求出 β 的最小二乘估计解,结合式(10)求出弹性模量的最优解。

$$e = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\bar{f}_i - f_{i0}}{f_{i0}} \right)^2 \quad (10)$$

式中, \bar{f}_i 为由二阶响应面模型计算得到的频率值。 e 为目标值, 取最小。

以上模型已编制成优化子程序, 用来寻求所需常数最优解。具体算法如下:

- (1) 给出任意一组初始弹性模量值;
- (2) 初步采用二分法缩小弹性模量的范围,

$$\left| \frac{f_i - f_{i0}}{f_{i0}} \times 100\% \right| \leq 5\% \quad (i = 1, 2, 3)$$

若弹性模量满足, 转入步骤(3), 否则继续采用二分法缩小范围;

(3) 建立二阶响应面模型并利用多组数值模拟值反算出系数矩阵 $\hat{\beta}$ 。

$$\bar{Y} = \bar{\beta}_0 + \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_i x_i + \sum_{i=1}^m \bar{\beta}_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq m} \bar{\beta}_{ij} x_i x_j$$

(4) 计算弹性模量: 利用响应面模型找出使 e 最小的一组弹性模量值, 输出计算结果。

$$e = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\bar{f}_i - f_{i0}}{f_{i0}} \right)^2$$

2 验证算例及讨论

2.1 各向同性薄板材料

采用已知材料性能参数的玻璃/环氧树脂薄板材料进行计算, 试验所得模态及对应频率值(除去刚体位移)如表1所示。

表1 玻璃/环氧树脂薄板试验模态值

Tab.1 Results of modal test of glass/epoxy

阶数	频率值/Hz	对应模态	阶数	频率值/Hz	对应模态
f_1	151.00	(1,1)	f_4	352.25	高阶模态
f_2	174.25	(2,0)	f_5	431.00	高阶模态
f_3	317.75	(0,2)	f_6	497.25	高阶模态

对于各向同性薄板材料, 有两个未知弹性模量 [$E_y = E_x, \nu_{xy} = E_x / (2G_{xy}) - 1$]。利用上述方法进行二分逼近。在二分法计算结果的基础上, 对 E_x 和 G_{xy} 在 ± 5 GPa 范围内建立两变量二阶响应面模型。由于需要至少6组初始撒点值。为体现设计变量的均匀性, 对其取三水平, 遍取9组值。然后利用该响应面模型在 ± 5 GPa 范围内找出最优解, 二分法及最终优化结果如表2所示。

表2 各向同性薄板计算结果

Tab.2 Results of isotropic thin plate

数据来源	$E_x = E_y$ /GPa	G_{xy} /GPa	$\nu_{xy} = E_x / (2G_{xy}) - 1$
文献参考值	68.99	28.7	0.217
二分法计算值	70	32.5	0.076
最终优化值	70	28.9	0.211
误差/%	1.464	0.697	2.73

由表2可以看出, 弹性模量的最大误差仅为2.73%, 说明此方法适用于各向同性材料弹性模量的计算。

2.2 正交各向异性薄板材料

利用该方法对正交各向异性薄板材料的弹性模量进行计算。采用碳纤维薄板, 尺寸为 240 mm × 180 mm × 2 mm, $E_x = 120$ GPa, $E_y = 10$ GPa, $G_{xy} = 4.9$ GPa, $\nu_{xy} = 0.3$, $\rho = 1510$ kg/m³, 试验模态值如表3所示。

表3 正交各向异性薄板模态试验值

Tab.3 Results of modal test of anisotropic thin plate

阶数	频率值/Hz	对应模态
f_1	88.582	(1,1)
f_2	163.23	(0,2)
f_4	318.89	(2,0)

在二分法基础上建立二阶响应面模型, 对于正交各向异性材料, 有四个未知弹性模量, 其响应面模型有15组待定系数, 故需要至少15组数据, 此处采用正交试验设计理论对初始撒点设计变量进行设计^[8], 采用四因素四水平正交试验设计方法。其中 E_x 、 E_y 、和 G_{xy} 的取值范围为 ± 6 GPa (G_{xy} 最小取1), ν_{xy} 的取值范围为 0.1 ~ 0.4。二分法及最终优化结果如表4所示。

表4 正交各向异性薄板计算结果

Tab.4 Results of anisotropic thin plate

数据来源	E_x /GPa	E_y /GPa	G_{xy} /GPa	ν_{xy}
文献参考值	120	10	4.9	0.3
二分法计算值	125	10.625	5	-
最终计算值	120.6	10.3	5.2	0.25
最终误差/%	0.5	3	6.12	16.67

由表4可以看出, 利用此方法所得到的弹性模量的计算值与真实值相对误差最小仅为0.5%, 最大为16.67%。泊松比相对误差稍微偏大, 这是因为其变化范围很小, 在该范围内其对频率的影响相对而言很不明显, 故相对误差较大。

结合以上各向同性薄板与正交各向异性薄板的计算结果, 可以看出此方法准确有效。

3 模态法确定针刺 C/C 复合材料弹性模量

3.1 模态试验设计

试样设计: 试件材料为针刺 C/C 复合材料, 在真实扩张段产品大端取样机加, 除去边界约束后的有效尺寸为 140 mm × 105 mm × 3 mm。试件及材料由西安航天复合材料研究所提供, 密度为 1650 kg/m³。

测试系统: 采用 LMS 数据采集分析系统对针刺 C/C 复合材料薄板进行模态试验。加载方式采用橡皮绳悬挂方式模拟全自由边界条件。激励方式采用冲击信号激励, 在试件表面均布 9 个激励点, 利用力

锤逐次激励各点^[9]。采用 LMS Test. Lab 模态分析系统,完成对数据的采集与处理分析。

3.2 结果及分析

表 5 为针刺 C/C 材料薄板模态试验值,图 1 为试验过程薄板模态振型图。

表 5 针刺 C/C 薄板模态试验结果

Tab. 5 Results of modal test of C/C plate

对应模态	试件 1#/Hz	试件 2#/Hz
(1,1)	520.338	518.449
(2,0)	668.071	662.582
(0,2)	1243.768	1240.888

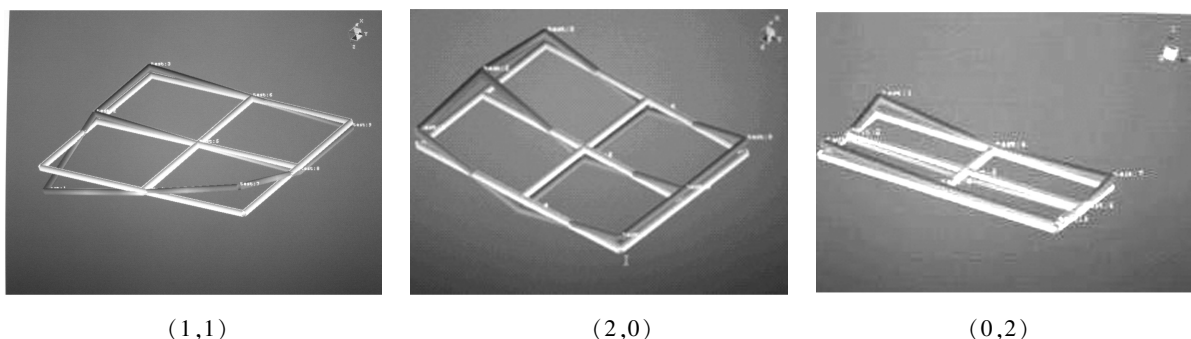


图 1 针刺 C/C 薄板模态振型图

Fig. 1 Modes of needled C/C composites

由以上结果可以看出,两块试样的模态试验结果相差极小,表明试样取样材料均匀,试验结果一致性良好,可以进行常数确定。

对试验数据进行平均处理并利用本文方法进行计算,获得结果如表 6 所示。

表 6 针刺 C/C 薄板材料常数计算结果

Tab. 6 Final result of C/C plate

E_x /GPa	E_y /GPa	G_{xy} /GPa	ν_{xy}
29.78	29.05	10	0.36

将此计算值再次带入有限元程序进行模拟计算,并与试验值进行对比,结果如表 7 所示。

表 7 数值模拟与试验对比结果

Tab. 7 Comparison of test results and numerical simulation results

对应模态	数模结果/Hz	试验值/Hz	相对误差/%
(1,1)	521.09	519.39	0.33
(2,0)	665.96	665.32	0.10
(0,2)	1244	1242.33	0.13

由表 7 可以看出,利用本文方法得到的弹性模量值计算出的频率值与试验得到的频率值非常接近,最大误差仅为 0.33%,表明本文方法获得的弹性模量值可认为近似真实材料性能常数。此外,从文中计算结果可以看出 $E_x \approx E_y$, $G_{xy} \approx E_x/2(1+\nu_{xy})$,即该材料可认为是宏观各向同性材料,这与其制造工艺所得结论是相吻合的。

4 结论

(1)采用模态法辨识材料弹性模量方法在各向同性薄壁板件和正交各向异性薄壁板件验证算例中,计算结果误差最大为 16.67%,最小仅为 0.5%,表明该方法准确有效;

(2)该方法获得的针刺 C/C 材料弹性模量值计算出的频率值与试验得到的频率值非常接近,最大误差仅

为 0.33%,表明该方法获得的材料常数是近似真实值。

需要指出的是,本文采用的二阶响应面模型对设计变量较少的模型能较好的满足其精度要求,若设计变量较多,其精度将大大降低。文中只对四变量以下的板件进行了计算,而对于设计变量更多的材料,例如正交各向异性厚壁板件,此方法将较难得到理想结果。

参考文献

- [1] Deobald L R, Gibson R F. Determination of elastic constants of orthotropic plates by a modal analysis/rayleigh-ritz technique [J]. Journal of Sound and Vibration, 1988, 124 (2) : 269-283
- [2] Forster F. Ein neues messverfahren zur bestimmung des elastizitats-moduls und der dämpfung [J]. Zeitschrift fuer Metallkunde, 1937, 29: 109-115
- [3] Alfano Marco, Pagnotta Leonardo. Determining the elastic constants of isotropic materials by modal vibration testing of rectangular thin plate [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 293 (2) : 426-439
- [4] Sol H. Identification of anisotropic plate rigidities using free vibration data [D]. Vrije Universiteit Brussel, Belgium, 1986
- [5] Cugnoni Joel, Gmur Thomal, Schorderet Alain. Inverse method based on modal analysis for characterizing the constitutive properties of thick composite plates [J]. Computer and Structures, 2007, 56 (3) : 1310-1320
- [6] 林玉华. 以振动测试及最佳化方法反算材料之弹性模量 [D]. 国立云林科技大学, 2010
- [7] 曾声宇. 基于相应面近似的反舰导弹并行子空间优化设计技术 [D]. 西安: 西北工业大学, 2004
- [8] 王世磊. 实验设计与数据处理 [D]. 郑州: 郑州大学, 2009
- [9] 张力. 模态分析与实验 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2011

(编辑 李洪泉)