

# TiC 颗粒增强钛基复合材料的动态损伤本构

李 伟

(中国轻型燃气轮机开发中心,北京 100028)

**文 摘** 分析了 TiC 颗粒增强钛基复合材料的微损伤演化规律,建立了含损伤演化的动态本构模型。TiC 颗粒增强钛基复合材料在拉伸载荷作用下,微裂纹以翼型裂纹形式扩展,基于平面翼型裂纹扩展模型,建立了二维动态损伤本构关系,并退化到一维拉伸状态,假设微裂纹成核规律满足 Weibull 分布,得到了一维拉伸应力状态下能够反映 TiC 颗粒增强钛基复合材料的损伤演化规律的宏微观相结合的动态本构关系。模型计算结果与试验结果吻合较好。

**关键词** 钛基复合材料, TiC 颗粒, 动态, 损伤演化, 本构模型

## Dynamic Damage Constitutive of TiC Particle Reinforced Titanium Matrix Composites

Li Wei

(China Gas Turbine Development Center, Beijing 100028)

**Abstract** The micro-damage evolution of TiC particle reinforced titanium matrix composites was analyzed, and a dynamic constitutive model with damage evolution was established. When TiC particle reinforced titanium matrix composites withstands tensile loads, micro-cracks expand in form of wing cracks through the matrix. Based on the wing crack growth model, a biaxial damage evolution constitutive was set up. And by degenerating, the uniaxial tension damage evolution constitutive was gotten. It is assumed that microcrack nucleation law accords with Weibull distribution, then a macroscopic and microscopic combined dynamic constitutive model in a one-dimensional stress state was established, which can reflect the damage evolution of TiC particle reinforced titanium matrix composites. Model simulation results agree well with the experimental curves.

**Key words** Titanium matrix composites, TiC particles, Dynamic, Damage evolution, Constitutive model

### 0 引言

TiC 颗粒增强钛基复合材料作为一种可以替代钛合金的优质高温、高强、轻质新型结构材料,能够适应新一代航空发动机对提高推重比、降低油耗的需求,在航空航天领域得到了越来越多的重视<sup>[1]</sup>。近年国内在 TiC 颗粒增强钛基复合材料的制备技术<sup>[2]</sup>、加工工艺<sup>[3]</sup>、拉伸性能<sup>[4]</sup>和高温特性<sup>[5]</sup>等方面取得了较多成果,但是对于 TiC 颗粒增强钛基复合材料的损伤演化行为,特别是动态损伤演化规律深入研究较少。由于增强体颗粒与基体钛合金之间的线胀系数不同,在材料的制备和加工过程中,必然会引入微裂纹和微空洞等微损伤,这种现象已经在大量的试验结果中显现出来<sup>[6-8]</sup>。含有微损伤的颗粒增强钛基复合材料在承受冲击载荷时,内部的微损伤开始启动扩展和汇合,将导致宏观材料力学劣化,最终导致宏观开裂或材料破坏。

全面描述颗粒增强复合材料因微损伤演化导致失效的过程,需要从材料内部微裂纹的形核长大的角度建立动态损伤本构,反映颗粒增强复合材料内部裂纹的分布规律和演化特性。本文将研究 TiC 颗粒增强钛基复合材料的裂纹扩展特征,在断裂力学基础上,建立了脆性材料基于平面翼型裂纹扩展模型的二维损伤本构关系,退化后得到 TiC 颗粒增强钛基复合材料单轴拉伸状态下的动态损伤演化本构模型。

### 1 TiC 颗粒增强钛基复合材料动态拉伸损伤机制

TiC 颗粒增强钛基复合材料在承受载荷时,基体先产生塑性变形,将载荷转移到增强体 TiC 粒子,增强体承受大部分载荷,当 TiC 颗粒周围的应力集中增加到某个临界值时,就会导致 TiC 与基体的脱粘,或者会使原本有缺陷的 TiC 大粒子断裂,成为最初的裂纹源。已萌生的裂纹,在继续加载过程中扩展成微裂纹,但并不是所有已萌生的裂纹都扩展,有的在扩展

收稿日期:2012-05-14

作者简介:李伟,1983 年出生,博士,工程师,主要从事钛基复合材料和钛合金力学性能研究。E-mail:zyxkli@163.com

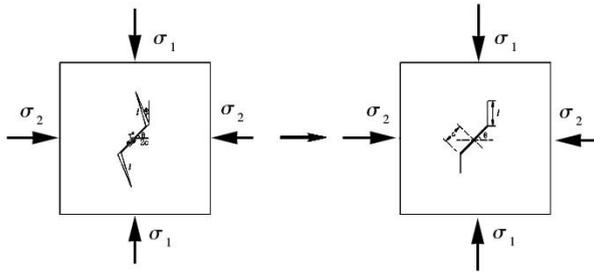
过程中碰到阻力就会停止扩展,有的裂纹则继续扩展<sup>[7]</sup>。原位观测裂纹的扩展过程<sup>[9]</sup>,发现可扩展的微裂纹在基体中以翼型裂纹的形式进行长大汇合,最终形成宏观裂纹导致材料失效,其典型微裂纹扩展情形如图1所示。



图1 微裂纹的翼型扩展<sup>[9]</sup>

Fig.1 Micro-cracks in the wing growth

借鉴已有的脆性材料压缩状态下的翼型裂纹演化模型<sup>[10]</sup>,分析 TiC 颗粒增强钛基复合材料的动态拉伸状态下的损伤演化行为。图2给出了平面状态下翼型裂纹扩展模型单元。翼型裂纹模型中的初始拉伸形核裂纹与主应力存在一定的角度( $\varphi$ ),但是随着微裂纹的生长和滑移,最终的裂纹方向将与主应力方向一致,可以简化为如图2(b)的模型。随着外载荷的增加,作用在原始微裂纹缺陷表面上的局部剪应力克服摩擦极限,微裂纹将沿裂纹面进行滑移,当裂纹尖端的应力集中因子满足裂纹扩展准则时,将在尖端处萌生拉伸裂纹,初生拉伸裂纹长度为 $l$ 。



(a) 原始模型 (b) 简化模型

图2 翼型裂纹扩展模型

Fig.2 Wing crack growth model

双轴准静态加载下的翼型裂纹尖端的应力集中因子 $K_I$ 和 $K_{II}$ 的表达式<sup>[11]</sup>:

$$K_I = \frac{2c\tau^* \cos\theta}{\sqrt{\pi(l+l_*)}} - \sigma_2 \sqrt{\pi l} \quad (1a)$$

$$K_{II} = \frac{-2c\tau^* \sin\theta}{\sqrt{\pi(l+l_*)}} \quad (1b)$$

式中, $l_* = 0.27c$ , $\tau^*$ 是促使原始裂纹面上下滑移的有效剪切应力,考虑了初始裂纹面上的滑移阻力,其具体的表达式为:

$$\tau^* = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta -$$

$$\frac{1}{2}\mu[(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta] \quad (2)$$

式中, $\mu$ 为摩擦因数,而裂纹面上的滑移阻力 $\tau_f$ 可以表示为:

$$\tau_f = \frac{1}{2}\mu[(\sigma_1 + \sigma_2) + (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta] \quad (3)$$

上面的推导是基于压缩受力状态的,所以应力以压缩为正,拉伸为负。

## 2 平面损伤本构关系

### 2.1 二维损伤本构的建立

假设材料是只有小变形和小转动发生的弹性材料,在二维主轴坐标系中,应力张量和应变张量则可以用一个矩阵来表示:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

总应变可以分解为材料弹性应变 $\varepsilon^e$ (微裂纹未扩展前)和微裂纹扩展引起的损伤应变 $\varepsilon^d$ 两部分:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^d = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + N\Delta\mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} \quad (5)$$

式中, $N$ 为裂纹密度, $\mathbf{S}$ 为柔度张量, $\Delta\mathbf{S}$ 为单个微裂纹扩展引起的柔度张量改变量。引入损伤张量 $\mathbf{D}$ ,可以得到材料的损伤本构:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{I} - \mathbf{D}) \mathbf{S}^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{S}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{D} : \mathbf{S}^{-1} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\mathbf{D}} : \mathbf{S}^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6b)$$

式中损伤张量 $\mathbf{D}$ 可以表示为:

$$\mathbf{D} = N\mathbf{S}^{-1}\Delta\mathbf{S}(\mathbf{I} + N\mathbf{S}^{-1}\Delta\mathbf{S})^{-1} \quad (7)$$

当损伤张量 $\mathbf{D}$ 为零矩阵时,表示翼型裂纹还未发生形核扩展;当损伤张量 $\mathbf{D}$ 为单位矩阵时,表示材料已经最终破坏。

### 2.2 损伤张量的求解

损伤张量 $\mathbf{D}$ 的求解需要知道单个微裂纹扩展引起的柔度张量的改变量 $\Delta\mathbf{S}$ 和裂纹密度 $N$ 。对于单个微裂纹扩展引起的柔度张量改变量 $\Delta\mathbf{S}$ 的求解,可利用能量守恒原理来平衡加载的系统做功和由于翼型裂纹拉伸扩展和摩擦滑移造成的能量耗散,用公式表达可以描述成:

$$W = 2U_e + W_f \quad (8)$$

式中, $W$ 表示载荷对弹性体所做的功, $U_e$ 表示由于裂纹扩展而释放的弹性应变能, $W_f$ 表示裂纹面之间的摩擦滑动而消耗的能量。由于翼型裂纹存在两侧拉伸裂纹,所以公式中弹性应变能 $U_e$ 前要乘2。

载荷对弹性体单位面积内所作的功可以表示为:

$$W = \Delta S_{11}\sigma_1^2 + 2\Delta S_{12}\sigma_1\sigma_2 + \Delta S_{22}\sigma_2^2 \quad (9)$$

由于裂纹扩展而释放的弹性应变能 $U_e$ 可以根据系统的弹性应变能释放率与翼型裂纹尖端的应力集中因子之间的关系进行求解。其中弹性应变能 $U_e$ 与弹性应变能释放率 $G$ 之间的关系为:

$$G = \frac{1}{2} \frac{\partial U_e}{\partial l} \Big|_p = \frac{(k+1)(1+\nu)}{4E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (10)$$

式中,  $P$  表示一定的加载条件。对  $G(l)$  进行积分, 可以得到弹性应变能  $U_e$  与拉伸裂纹长度  $l$  的关系。

裂纹面之间的摩擦滑动而消耗的能量  $W_f$  与裂纹滑移的摩擦阻力  $\tau_f$  和裂纹面滑移距离  $\delta$  存在一定的关系, 可以表示为:

$$W_f = 2c\tau_f\delta \quad (11)$$

裂纹面滑移距离  $\delta$  与初始裂纹尖端的应力集中因子  $K_I$  的联系<sup>[11]</sup>:

$$K_I = \frac{2E}{(k+1)(1+\nu)} \cdot \frac{\delta \cos\theta}{\sqrt{2\pi(l+l_{**})}} - \sigma_2 \sqrt{\frac{\pi l}{2}} \quad (12)$$

从而可以得到摩擦滑动而消耗的能量  $W_f$  与拉伸裂纹长度  $l$  的关系。

通过对比系数可得到单个微裂纹扩展引起的柔度张量改变量  $\Delta S$  是一个关于拉伸裂纹长度  $l$  和裂纹密度  $N$  相关的二阶函数矩阵, 其各分量  $\Delta S_{ij}$  具体表达式见附录 1, 从而损伤张量  $D$  是一个关于拉伸裂纹长度  $l$  和裂纹密度  $N$  相关的二阶函数矩阵, 可以表示为  $D(l, N)$ 。

### 3 一维动态拉伸损伤本构

前面给出的损伤本构是建立在脆性材料翼型裂纹扩展模型基础上的, 是一个通式, 涉及到具体的本构表述和损伤破坏模式与主应力  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的相对大小和方向都存在直接的关系, 现将上述结果退化到一维拉伸载荷下材料的损伤本构。对于一维拉伸载荷, 则图 1 中的主应力  $\sigma_1 = 0$ , 主应力  $\sigma_2$  取为拉伸应力, 含有负号, 则可以得到了含损伤的一维拉伸应力应变关系:

$$\sigma = \frac{E}{1 + NE\Delta S_{22}} \varepsilon = \bar{E}\varepsilon = (1 - D)E\varepsilon \quad (13)$$

式中,  $\bar{E}$  为有效弹性模量, 损伤参量  $D$  是裂纹密度  $N$  和拉伸裂纹长度  $l$  有关的函数, 其表达式为:

$$D(N, l) = \frac{NE \times \Delta S_{22}(l)}{1 + NE \times \Delta S_{22}(l)} = \frac{Nf(l)}{1 + Nf(l)} \quad (14)$$

式中涉及相关参数和函数的具体表述见附录 2。则含损伤演化的本构关系为:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon} - E(\dot{D}\varepsilon + D\dot{\varepsilon}) \quad (15)$$

式中损伤演化率为:

$$\dot{D}(N, l) = \frac{\dot{N} \times f(l) + N \times \dot{f}(l)}{[1 + Nf(l)]^2} \quad (16)$$

微裂纹密度  $N$  与应变  $\varepsilon$  之间满足双参数的 Weibull 分布关系<sup>[12-13]</sup>, 即:

$$N = \kappa\varepsilon^m \quad (17)$$

式中,  $N$  是给定应变水平下的单位体积内所激活的裂纹数,  $\kappa$  和  $m$  是描述材料破坏特性的参数。

在一维拉伸给定应变率 ( $\dot{\varepsilon} = \text{const}$ ) 加载状态下, 任意时刻的应力和损伤参量的值:

$$\begin{cases} t^{i+1} = t^i + \Delta t \\ \varepsilon^{i+1} = \varepsilon^i + \Delta t \dot{\varepsilon} \\ D^{i+1} = D^i + \Delta t \dot{D} \\ \sigma^{i+1} = \sigma^i + \Delta t \dot{\sigma} \end{cases} \quad (18)$$

设初始状态为  $D = 0, \varepsilon = 0, \sigma = 0, l = l^*$ , 通过损伤率  $\dot{D}$  和应力率  $\dot{\sigma}$ , 在时间  $t$  内可得到相应的损伤、应力和应变。设定一个损伤阈值  $D_f$ , 就可以得到材料的断裂应力和应变。这样就建立了一维应力状态下的损伤演化本构方程。

### 4 损伤演化模型与试验结果的比较

由于材料内部的微裂纹取向、长度各不相同, 为了方便计算, 采取了以下假设: 所有微裂纹平行排列, 其初始长度都为  $2c$ , 按相同的速度  $v_c$  扩展, 并忽略微裂纹间的相互作用。

当微裂纹与主应力夹角  $\theta$  为  $45^\circ$  时, 最适合初始裂纹扩展, 扩展长度最长<sup>[14]</sup>。微裂纹初始尺寸  $2c$  一般与增强相 TiC 粒子的尺寸量级相当。拉伸载荷下翼型裂纹形成扩展的阈值用应变来控制, 与应变率无关, 取为  $\varepsilon_0 = 0.004$ 。材料的动态断裂韧度  $K_{IC}^d$  由于没有可参考的试验值, 取静态断裂韧度<sup>[15]</sup>。

表 1 单轴拉伸损伤演化模型的相关参数

Tab.1 Parameters of uniaxial tensile damage evolution model

$\nu$	$\rho/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	$K_{IC}/\text{MPa}\cdot\sqrt{\text{m}}$	$\mu$	$\kappa/10^{17}$
0.35	4.5	40	0.7	9
$m$	$\theta/(^\circ)$	$2c/\mu\text{m}$	$D_f$	
9.5	45	20	0.7	

图 3 给出了三种应变率条件下损伤演化模型的计算结果和试验结果<sup>[4-5]</sup> 的比较情况。从图 3 给出的三个应变率下的理论计算值与试验值的比较可以看出, 利用建立的单轴拉伸状态下的动态损伤演化模型计算的结果都与试验结果吻合得较好。由于颗粒增强复合材料的脆性特征, 特别是由于一些加工工艺造成的初始损伤, 使得材料的动态断裂破坏具有很大的随机性和样本个性的偏差, 在许可的范围内可以认为建立的损伤演化本构模型能够用来模拟 TiC 颗粒增强钛基复合材料在冲击载荷下的力学行为。

加载初期应变很小, 根据微裂纹密度的定义, 可以知道单位体积内激活的微裂纹数很少, 对材料的弱化作用较小, 体现在损伤演化曲线上是一个缓慢上升的阶段, 故应力应变曲线的初始阶段的非线性程度不明显。到了加载后期, 随着微裂纹的形核和扩展, 损伤累积程度迅速增加, 应力应变曲线的非线性程度较高, 当损伤达到一定程度时, 材料失稳破坏。

进一步分析图 3 可以发现, 给出的三个应变率下应力非线性上升阶段的计算结果比试验结果高, 其原因与动载荷作用时, TiC 颗粒增强钛基复合材料中短

时间内大量微裂纹形核扩展有关,随着微裂纹数量和尺寸的不断增加,裂纹之间相互作用开始呈现,而模

型中并未考虑裂纹间的相互作用,所以造成加载后期的模型计算结果高于真实的试验结果。

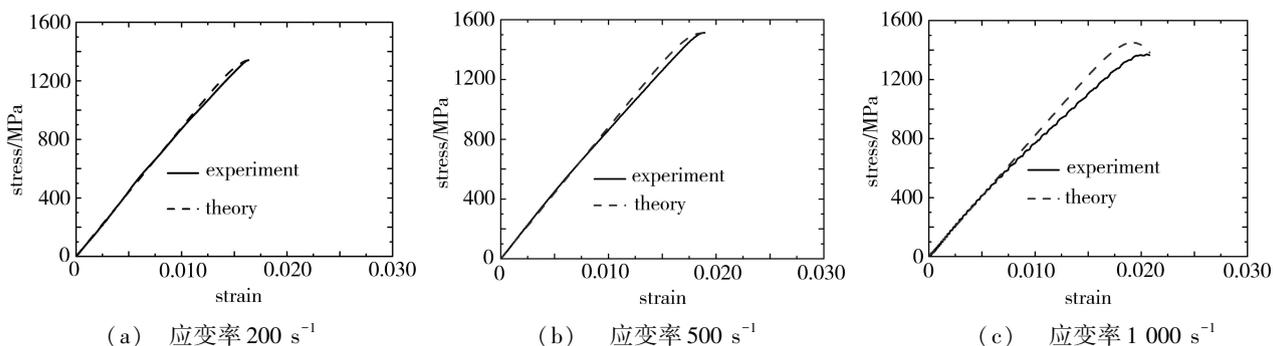


图3 损伤演化模型计算结果

Fig. 3 Calculations of damage evolution model

## 5 结论

TiC 颗粒增强钛基复合材料在承受拉伸载荷时,基体首先发生塑性变形,将载荷转移到增强体 TiC 粒子,增强体承受大部分载荷,TiC 颗粒周围产生较大的应力集中,含有缺陷的 TiC 粒子首先发展成为裂纹源,之后微裂纹在基体中开始扩展演化,其扩展规律呈翼型裂纹扩展。

在断裂力学理论上,建立了基于平面翼型裂纹扩展模型的二维脆性材料损伤本构关系,并将该本构关系退化到一维拉伸状态,假设微裂纹成核规律满足 Weibull 分布,进而建立了考虑 TiC 颗粒增强钛基复合材料在一维拉伸状态下微裂纹损伤演化的动态本构模型。

利用模型计算了应变率 1 000、500 和 200  $s^{-1}$  三个应变率下 TiC 颗粒增强钛基复合材料的应力应变曲线,计算结果与试验结果吻合较好。

### 参考文献

[1] Immarigeon J P, Holt R T, Koul A K, et al. Light-weight materials for aircraft applications[J]. *Materials Characterization*, 1995, 35: 41-67

[2] Liu Y, Chen L F, Tang H P, et al. Design of powder metallurgy titanium alloys and composites[J]. *Materials Science and Engineering A*, 2006, 418: 25-35

[3] 马凤仓, 吕维洁, 覃继宁, 等. 锻造对(TiB + TiC)增强钛基复合材料组织和高温性能的影响[J]. *稀有金属*, 2006, 30(2): 236-240

[4] 李伟, 宋卫东, 宁建国, 等. TP-650 钛基复合材料拉伸状态下的应变率效应[J]. *中国有色金属学报*, 2010, 20(6): 1131-1136

[5] 李伟, 宋卫东, 宁建国, 等. 应变率及温度对 TP-650 力学性能的影响[J]. *稀有金属材料与工程*. 2010, 39(7): 1195-1198

[6] 张延杰, 曾泉浦, 毛小南, 等. Ti-15s/TiC<sub>p</sub> 复合材

料的拉伸断裂过程[J]. *稀有金属材料与工程*, 1997, 26(5): 18-22

[7] 毛小南, 周廉, 曾泉浦, 等. TiC 颗粒增强钛基复合材料的形变断裂[J]. *稀有金属材料与工程*, 2000, 29(4): 217-220

[8] 曾泉浦, 毛小南, 陆峰. 颗粒强化钛基复合材料的断裂特性[J]. *稀有金属材料与工程*, 1993, 22(1): 17-22

[9] 金云学, 李俊刚. TiC/Ti 复合材料动态拉伸的裂纹形成及扩展机制[J]. *稀有金属材料与工程*, 2007, 36(5): 764-768

[10] Ashby M F, Hallam S D. The failure of brittle solids containing small cracks under compressive stress states[J]. *Acta Metallurgica*, 1986, 34(3): 497-510

[11] Ravichandran G, Subhash G. A micromechanical model for high strain rate behavior of ceramics[J]. *International Journal of Solid and Structures*, 1995, 32(17): 2627-2646

[12] Karel Matous. Damage evolution in particulate composite materials[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 1489-1503

[13] Lee H K, Pyo S H. An elastoplastic multi-level damage model for ductile matrix composites considering evolutionary weakened interface[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2008, 45: 1614-1631

[14] Horii H, Nemat-Nasser S. Dynamic damage evolution in brittle microcracking solids[J]. *Mechanics of Material*, 1992, 14: 83-103

[15] da Silva A A M, dos Santos J F, Strohaecker T R. An investigation of the fracture behaviour of diffusion-bonded Ti6Al4V/TiC/10p [J]. *Composites Science and Technology*, 2006, 66: 2063-2068

[16] Huang C Y, Subhash G, Vitton S J. A damage growth model for uniaxial compressive response of rock aggregates[J]. *Mechanics of Materials*, 2002, 34: 267-277

(编辑 李洪泉)

## 附录 1

单个微裂纹扩展引起的柔度张量改变量  $\Delta S$  的各分量

$$\Delta S_{11}(l) = \frac{4c^2(1+k)(1+v)}{E} \left[ \frac{(\sin\theta - \mu\cos\theta)^2 \cos^2\theta}{\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{l_*}\right) + \frac{\mu(\sin\theta - \mu\cos\theta) \cos^3\theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l+l_{**}}{l+l_*}} \right]$$

$$\Delta S_{22}(l) = \frac{4c^2(1+k)(1+v)}{E} \left\{ \frac{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2 \sin^2\theta}{\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{l_*}\right) + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\pi l}{c}\right)^2 + \frac{(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2 \sin 2\theta (l_*)}{2(c)} \left[ \sqrt{\frac{l}{l_*} \left(1 + \frac{l}{l_*}\right)} - \ln\left(\sqrt{\frac{l}{l_*}} + \sqrt{1 + \frac{l}{l_*}}\right) \right] - \frac{\mu(\cos\theta + \mu\sin\theta) \sin^3\theta}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l+l_{**}}{l+l_*}} - \frac{(\sqrt{2}-1)\mu\sin\theta \tan\theta (\pi l_{**})}{4(c)} \sqrt{\frac{l}{l_{**}} \left(1 + \frac{l}{l_{**}}\right)} \right\}$$

$$\Delta S_{12}(l) = -\frac{4c^2(1+k)(1+v)}{E} \left\{ \frac{[(1-\mu^2)\sin 2\theta - 2\mu\cos 2\theta] \sin 2\theta}{4\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{l_*}\right) + \frac{(\sin\theta - \mu\cos\theta) \cos^2\theta (l_*)}{2(c)} \left[ \sqrt{\frac{l}{l_*} \left(1 + \frac{l}{l_*}\right)} - \ln\left(\sqrt{\frac{l}{l_*}} + \sqrt{1 + \frac{l}{l_*}}\right) \right] + \frac{\mu(\cos 2\theta + \mu\sin 2\theta) \sin 2\theta}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l+l_{**}}{l+l_*}} + \frac{(\sqrt{2}-1)\mu\cos\theta (\pi l_{**})}{8(c)} \sqrt{\frac{l}{l_{**}} \left(1 + \frac{l}{l_{**}}\right)} \right\}$$

## 附录 2

单裂纹扩展引起的柔度张量各参量

$$f(l) = A \ln\left(1 + \frac{l}{l_*}\right) + 2\pi l^2 + B \left[ \sqrt{\frac{l}{l_*} \left(1 + \frac{l}{l_*}\right)} - \ln\left(\sqrt{\frac{l}{l_*}} + \sqrt{1 + \frac{l}{l_*}}\right) \right] - C \sqrt{\frac{l+l_{**}}{l+l_*}} - D \sqrt{\frac{l}{l_{**}} \left(1 + \frac{l}{l_{**}}\right)}$$

$$\dot{f}(l) = \left[ \frac{A}{l+l_*} + 4\pi l + \frac{Bl}{l_* \sqrt{l(l+l_*)}} - \frac{C(l_* - l_{**})}{2\sqrt{l+l_{**}}(l+l_*)^{\frac{3}{2}}} - \frac{D(l_{**} + 2l)}{2l_{**} \sqrt{l(l+l_{**})}} \right] V_c$$

式中,  $A = \frac{16c^2(\cos\theta + \mu\sin\theta)^2 \sin^2\theta}{\pi}$ ;

$$B = 8cl_* (\cos\theta + \mu\sin\theta)^2 \sin 2\theta;$$

$$C = 8\sqrt{2}c^2\mu(\cos\theta + \mu\sin\theta) \sin^3\theta;$$

$$D = 4(\sqrt{2}-1)\pi cl_{**}\mu\sin\theta \tan\theta;$$

$V_c$  为裂纹扩展速度与应力场强度因子之间存在经验关系<sup>[16]</sup>:

$$V_c = V_{cm} \frac{K_I - K_{IC}^d}{K_I - K_{IC}^d/2}$$

式中,  $K_{IC}^d$  为动态载荷下的断裂韧度, 与加载条件有关;  $V_{cm}$  为裂纹扩展的极限速度, 一般取为 0.3 ~ 0.5 倍的瑞利波速。