

# 基于微分几何纤维缠绕回转壳封头的厚度计算

唐修卿<sup>1</sup> 何钦象<sup>1</sup> 李辅安<sup>2</sup>

(1 西安理工大学工程力学系,西安 710054)

(2 西安航天复合材料研究所,西安 710025)

**文 摘** 应用微分几何理论,建立了纤维复合材料在回转壳封头上稳定缠绕的数学模型,推导出了缠绕角、中心角与轴向坐标之间的微分方程。结合缠绕轨迹在封头上叠带的几何关系,给出了厚度的计算方法。算例表明该计算方法反映了纤维缠绕回转壳封头上厚度的分布规律,可直接应用于结构的初步设计。

**关键词** 纤维缠绕,微分几何,回转壳封头,缠绕角,厚度

## Calculated Thickness of Filament Winding Ellipsoidalhead Based on Differential Geometry

Tang Xiuqing<sup>1</sup> He Qinxiang<sup>1</sup> Li Fu'an<sup>2</sup>

(1 Department of Engineering Mechanics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054)

(2 Xi'an Aerospace Composite Materials Institute, Xi'an 710025)

**Abstract** The mathematical model of fiber composite material winding steadily on ellipsoidalhead was established by application of differential geometry theory. The differential equations between winding angle/center angle and axial coordinates were obtained, and then thickness of filament winding ellipsoidalhead was calculated by considering the geometrical relationship of winding path. The numerical example show that the calculation method reflects particular distribution rule of thickness on filament winding ellipsoidalhead, and the method can be applied to the preliminary design.

**Key words** Filament, Differential geometry, Ellipsoidalhead, Winding angle, Thickness

### 1 引言

在纤维缠绕复合材料压力容器的设计和分析过程中,封头上纤维的缠绕角度、缠绕厚度等参数十分重要,因为从纤维缠绕壳体的静水压实验来看,此处最容易发生破坏。由于纤维缠绕复合材料压力容器的封头普遍采用椭圆回转壳,较筒身段纵向加环向的缠绕方式而言,封头段只有纵向缠绕层而没有环向缠绕层,同时封头段纵向缠绕层的纤维缠绕角度又是随着封头回转半径的减小而增大的,从赤道处的 $\alpha_0$ 随封头半径的变化而逐渐变化到极孔处的 $90^\circ$ ,结合纤维缠绕工艺的连续性可知,封头上的纤维缠绕厚度是回转半径和缠绕角度的函数。曾有学者<sup>[1-2]</sup>通过将纤维在回转壳封头上的缠绕轨迹近似看作直线对厚度进行计算。近几年来微分几何方法开始被引入纤维缠绕复合材料的设计过程中<sup>[3-4]</sup>,并取得了令人满意的效果。

本文应用微分几何理论,将纤维在回转壳封头上的缠绕轨迹以微分方程的形式给出,并推导出缠绕中心角关于回转半径和缠绕角度的方程。

### 2 回转曲面上非测地线缠绕的数学模型

#### 2.1 稳定缠绕判据

非测地线缠绕在芯模表面上的某一点纤维 $P$ 沿曲率半径方向 $c$ 的力 $f_r$ 可分解为:垂直于芯模表面沿曲面 $P$ 点主法向量 $n$ 的负方向的力 $f_n$ 和垂直于 $P$ 点纤维的切线 $t$ 沿测地曲率向量 $g$ 方向的力 $f_g$ 。其中 $f_g$ 使纤维产生滑移趋势,摩擦力 $f_w$ 与 $f_g$ 方向相反,因此纤维稳定不滑移的充分必要条件<sup>[4]</sup>为: $|f_g| \leq |f_w|$ 。

首先定义滑线指数 $\lambda = \frac{|f_g|}{|f_n|} = \frac{K_g}{K_n}$ ,最大静摩擦系数 $\mu_s = \frac{|f_w|}{|f_n|}$ 。式中, $K_g$ 为纤维曲线的测地曲率, $K_n$ 为纤维曲线的法曲率。按以上要求可得稳定缠绕判

据为  $|\lambda| \leq \mu_s$ 。式中,  $\mu_s$  为纤维复合材料与芯模表面的最大静摩擦系数, 可以通过实验确定。

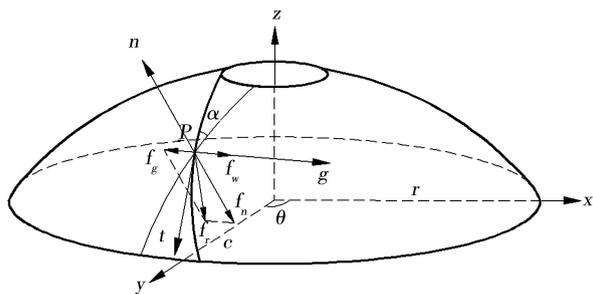


图1 回转曲面上非测地线缠绕纤维在P点的受力关系

Fig.1 Force system of tensioned fibre along semi-geodesic path on ellipsoidal head

## 2.2 缠绕角方程

设回转曲面的基本方程  $r(\theta, z) = \{r(z) \cos\theta, r(z) \sin\theta, z\}$ , 根据微分几何理论<sup>[5]</sup>有  $\frac{dz}{d\theta}$

$$= \sqrt{\frac{r^2}{1+r'^2}} \operatorname{tg}\beta, \text{ 其中 } \beta \text{ 为 } r_\theta \text{ 与切线 } t \text{ 之间的夹角。}$$

根据 Euler 公式可求得法曲率  $K_n$  :

$$K_n = \frac{r''r \tan^2\beta - 1 - r'^2}{(1+r'^2)^{3/2}r(1+\tan^2\beta)} \quad (1)$$

根据 Liouville 公式可求得测地曲  $K_g$  :

$$K_g = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+r'^2}} \cdot \frac{r'}{r} \quad (2)$$

根据缠绕工艺可知: 缠绕角为  $\alpha$  为  $r_z$  与切线  $t$  之间的夹角, 故  $\alpha = 90^\circ - \beta$ , 由微分几何可得

$$\sqrt{1+r'^2} \frac{dz}{ds} = \sin\beta \quad (3)$$

由式(1)–式(3)得:

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{\lambda[(1+r'^2)\sin^2\alpha - rr''\cos^2\alpha] - (1+r'^2)r'\sin\alpha}{\cos\alpha r(1+r'^2)} \quad (4)$$

若  $\lambda = 0$ , 对方程两端积分为测地线缠绕规律<sup>[6]</sup>:  $r\sin\alpha = r_0$ ,  $r_0$  为极孔半径; 若  $\lambda \neq 0$ , 方程没有解析解, 已知边界条件的情况下, 利用常微分方程的数值解法 (Runge-Kutta 法) 可以确定  $\alpha$  与  $z$  之间的关系。

## 2.3 中心角方程

由微分几何可知, 曲线切向量  $t = r_z \frac{dz}{ds} + r_\theta \frac{d\theta}{ds}$

所以有:

$$\cos\alpha = \frac{r_z \cdot t}{|r_z| \cdot |t|} = \left( \frac{1+r'^2}{r^2\theta'^2 + 1+r'^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

解上式得:

$$\theta'(z) = \frac{1}{r} (1+r'^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\alpha \quad (5)$$

在  $\alpha$  与  $z$  之间的关系由式(4)确定, 边界条件已知的情况下, 利用常微分方程的数值解法 (Euler 法) 可以唯一确定  $\theta$  与  $z$  之间的关系。由上可得, 在给定缠绕起点 ( $\theta_0, \alpha_0$ ) 后, 非测地线缠绕在回转曲面上任一点纤维的位置可以精确求解。

## 3 纤维非测地线缠绕回转壳的厚度计算方法

### 3.1 距极孔一个带宽范围内任一点厚度的计算

封头赤道之间的纱带在缠绕过程中都通过 A 点, 如图 2 所示。A 点的厚度就是这几条纱带叠加的厚度<sup>[2]</sup>:

$$h = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot S \cdot h_p \quad (6)$$

式中,  $h$  为单层缠绕后 A 点的厚度,  $h_p$  为纱带厚度,  $S$  为赤道上纤维束数,  $\varepsilon$  为  $\angle COB = 2 \times (\theta_E - \theta_A)$ 。

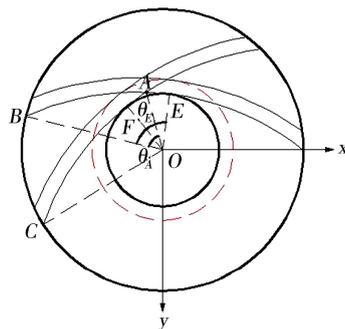


图2 距封口一个带宽范围内点的叠带关系

Fig.2 Band geometry within one band width of polar opening

### 3.2 距极孔一个带宽范围外任一点厚度的计算

由图 3 可知, 纱带在缠绕过程中都通过 A 点,  $\varepsilon$  为  $2 \times \angle COB$ , 其中  $r_C = r_0 + w$ ,  $r_0$  是极孔半径,  $w$  是纱带宽度。

$$\angle COB = \angle AOC - \angle AOB = \theta_A - \theta_C$$

综上所述所述, 由式(6)可知, 封头上厚度的计算公式如下:

$$\begin{cases} h = \frac{S \cdot h_p}{\pi} \cdot (\theta_E - \theta_A) & r_0 \leq r \leq (r_0 + w) \\ h = \frac{S \cdot h_p}{\pi} \cdot (\theta_A - \theta_C) & (r_0 + w) \leq r \leq R_0 \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\theta_A$ 、 $\theta_E$ 、 $\theta_C$  可通过(5)求解。

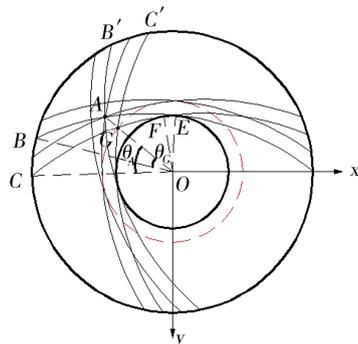


图3 距封口一个带宽范围外点的叠带关系

Fig.3 Band geometry beyond one band width of polar opening

#### 4 算例

为了验证基于微分几何研究纤维缠绕回转壳封头厚度的合理性,将以上推导的算法编制为程序进行了计算。算例采用长短轴比为2的半椭球壳<sup>[2]</sup>,采用平面缠绕,即沿测地线轨迹缠绕,并且采用了扩孔工艺,即缠绕一个循环,封头缠绕极孔半径外移一定量后再进行下一个循环缠绕,极孔变化量见表1。计算中的参数为: $r_c = 696 \text{ mm}$ ,  $w = 4.75 \text{ mm}$ ,  $h_p = 0.165 \text{ mm}$ ,  $S = 920$ 。

表1 封头不同缠绕极孔半径

Tab.1 Various wound polar radius of ellipsoidalhead

Wound step	Wound polar radius/mm
1	128
2	128
3	128
4	138
5	148
6	158
7	168
8	178
9	188
10	198

表2 封头上纤维缠绕厚度的实测值、计算值、相对误差

Tab.2 Actual value, prediction value, relative errors of thickness on ellipsoidalhead

Radius change direction /mm	Actual value /mm	Prediction value /mm	Errors of prediction value /%
0	3.30	3.30	0.1
35	3.30	3.35	-1.5
55	3.34	3.38	-1.2
75	3.40	3.43	-0.7
95	3.50	3.49	0.3
115	3.62	3.57	1.5
135	3.71	3.67	1.2
155	3.79	3.79	0.1
175	4.05	3.94	2.7
195	4.34	4.13	4.8
215	4.54	4.38	3.6
235	4.93	4.70	4.7
255	5.23	5.15	1.6
275	5.70	5.80	-1.8
295	6.75	6.90	-2.2
315	8.80	9.26	-5.2
325	11.78	12.25	-3.9
330	15.69	15.95	-1.7
335	20.52	21.53	-4.9
338	19.71	18.52	6.0
341	20.87	20.26	2.9
342	11.87	12.62	-6.2

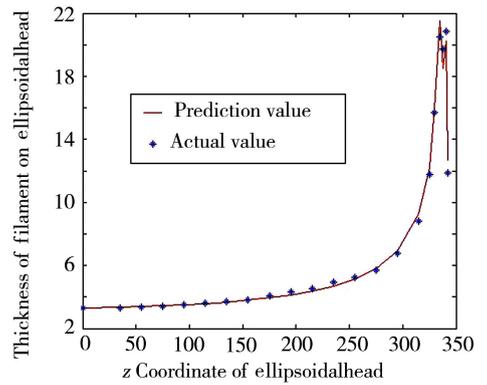


图4 封头上纤维厚度的计算值与实测值比较

Fig.4 Comparison of actual and prediction value of thickness on ellipsoidalhead

将封头上纤维缠绕厚度的计算值与实测值进行了比较,结果如表2所示,两者的相对误差在 $\pm 6\%$ 以内,在工程中是可以接受的(图4)。其中两者在极孔附近相对误差比较明显的原因,可能是由于纤维在极孔附近堆积,造成封头形面变化较大,从而导致纤维架空所引起的,对整体精度影响不大。

#### 5 结论

本文给出了纤维在回转壳封头上稳定缠绕的数学模型及叠带关系,通过算例证明了采用微分几何计算封头段纤维缠绕厚度的方法精度较高,并且适用于纤维非测地线缠绕的厚度计算,可直接用于结构的初步设计,也为有关纤维缠绕回转壳厚度的进一步研究提供了理论依据。

#### 参考文献

- [1] Gramll H C. 纤维缠绕压力容器的圆顶厚度[J]. 国外导弹与航天运载器,1991(3):66-75
- [2] 陈林泉,王路仙. 纤维缠绕壳体封头厚度的计算方法[J]. 固体火箭技术,1993(2):11-15
- [3] ZuLei, Sotiris Koussios, Adriaan Beukers. Design of filament-wound isotensoid pressure vessels with unequal polar openings[J]. Composite Structures,2010(92):2307-2313
- [4] 祖磊,何钦象,李辅安. 纤维缠绕复合材料圆环壳线型设计与优化[J]. 宇航材料工艺,2006,36(3):14-18
- [5] Giarlet P G, Li T T. Differential geometry: theory and applications[M]. Beijing: Higher Education Press,2008:33-47
- [6] 富宏亚,黄开榜,朱方群,等. 非测地线稳定缠绕的边界条件及稳定性方程[J]. 哈尔滨工业大学学报,1996,28(2):125-128

(编辑 李洪泉)