

# 增强相分布方式对复合材料有效力学性能的影响

谭祥军 杨庆生

(北京工业大学机电学院,北京 100022)

**文 摘** 针对增强相在基体材料中的分布方式的不同,建立了一个研究复合材料有效性能的细观力学模型。该模型由固体基体和增强相两相介质组成,假设细观结构呈周期性均匀分布。采用直接平均法和二尺度展开法计算了复合材料的有效性能,得出了不同微结构分布的复合材料横向弹性模量、泊松比和剪切模量随增强相材料体积分数比的变化曲线,其变化规律与实验数据吻合较好。研究表明在较大体积分数比下,增强相的分布直接影响到复合材料的弹性刚度。

**关键词** 复合材料,体积分数比,细观结构,有效性能

## Influence of Microstructure on Effective Mechanical Properties of Composite Material

Tan Xiangjun Yang Qingsheng

(College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100022)

**Abstract** For different distribution of the reinforced phase in matrix material, a micromechanical model was developed to investigate the effective properties of composite material. The composite consisted of a solid matrix material and a reinforced phase. It was assumed that the composite had a periodic well-distributed microstructure. The transverse Young's modulus, shear modulus and poisson ratio of the composite were calculated by the two-scale expansion method. The numerical results were in accord with experimental data. It is indicated that the microstructure can directly affect the effective properties.

**Key words** Composites, Volume fraction, Microstructure, Effective properties

### 0 引言

复合材料中增强相在基体材料内多半呈现随机分布。在单向纤维复合材料的横截面内,纤维呈二维随机分布,多数学者将其简化为均匀性与周期性分布的细观结构。B. Hassani和 E. Hinton<sup>[1~2]</sup>考虑了椭圆形的增强相在基体材料中为矩形分布和矩形孔洞为正方形分布的情况,得出了复合材料的有效弹性模量与细观变形。Peng Xiaogqi<sup>[3]</sup>研究了圆形增强相在基体材料中为正方形分布,得出了复合材料的有效弹性模量、有效泊松比和有效剪切模量等随应变的变化曲线。Yang Qingsheng<sup>[4]</sup>使用直接平均法研究了"L"形与"Y"形增强相在基体材料中的矩形分布,得出了

复合材料平均应力与平均应变能在不同应变下的值。雷友峰等<sup>[5]</sup>采用细观有限元法预测了增强相为正四角形排列和正六角形排列的复合材料代表体元的有效弹性模量,并将预测值与实验数据进行了比较。龚曙光等<sup>[6]</sup>使用多尺度均匀化理论对多孔材板中正四角形排列和正三角形排列的圆形孔洞进行了优化设计。

在实际中,复合材料的单胞横截面的形状多以正四角形和正六角形为主,此时单胞所对应的单向增强相在基体材料中的分布分别为正四角形和正三角形分布。本文针对单向增强相在基体材料中的这两种分布方式,建立了细观力学模型。该模型由基体材料

收稿日期:2007-08-08

基金项目:国家自然科学基金资助(10272006, 30470439)

作者简介:谭祥军,1982年出生,硕士,主要从事复合材料细观力学的研究。E-mail: qsyang@bjut.edu.cn

宇航材料工艺 2008年 第1期

— 23 —

和增强相两相介质组成,并假设细观结构呈周期性均匀分布。采用直接平均法和二尺度展开法计算了不同体积分数下复合材料的有效性能,得出了横向弹性模量、泊松比和剪切模量随增强相体积分数比的变化曲线。

### 1 细观力学模型

对于单方向铺设的连续纤维复合材料,由于纤维在轴向无限长,只需分析纤维在横截面内的分布情况。典型的复合材料单胞分布为正四角形与正六角形分布,如图 1 所示。对于这种具有均匀性和周期性分布的细观结构,可以取出一个单胞作为代表体元 (RVE)。这种单胞可以按平面应变模型或广义平面应变 (考虑轴向位移) 模型计算,而且要满足变形后的单胞边界仍为直线或平面的协调要求<sup>[7]</sup>。根据细观结构是呈均匀性和周期性分布的特点,可以通过分析其中的一个细观单元的性能,进而评价整个材料的宏观有效性能。

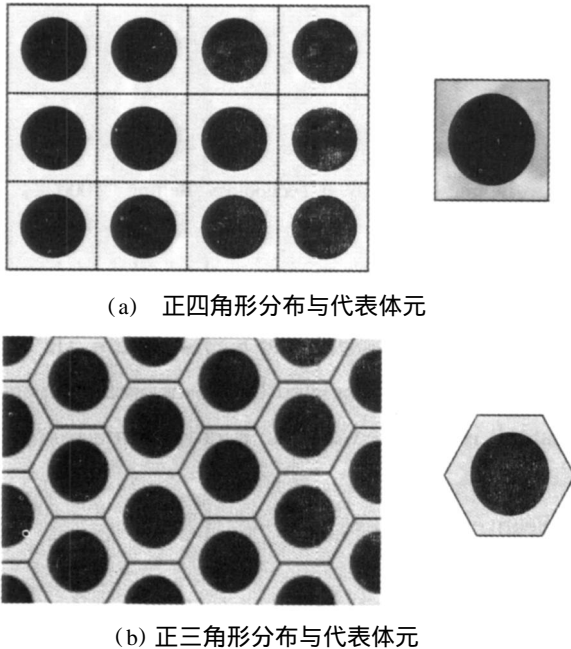


图 1 细观结构分布及其代表体元  
Fig 1 Distribution of microstructure and RVE

由于横截面为正四角形与正六角形的胞元具有周期性,仔细考察其胞元特点可以发现有如图 2 所示的规律:四个相邻的正四角形单胞增强相圆心组成一正四角形,且边长为正四角形单胞的长度;三个相邻的正六角形单胞增强相圆心组成一正三角形,且边长为正六角形边长的 $\sqrt{3}$ 倍。因而横截面为正四角形的周期性结构所对应的增强相为正四角形分布;横截面为正六角形的周期性结构所对应的增强相为正三角形分布。根据结构的几何对称性,对于两种分布的细观结构,采用图中所示的阴影部分作为计算区域。而

结构的周期性边界条件可以用通常的约束条件代替。例如,考虑代表体元的法向变形时,其周期性和对称性使上下两边和左右两边的法向位移为零,可以得到如图 3 (a)所示的约束形式。考虑代表体元的纯剪切变形时,其周期性和反对称变形模式使边界上的切向位移为零,如图 3 (b)所示。

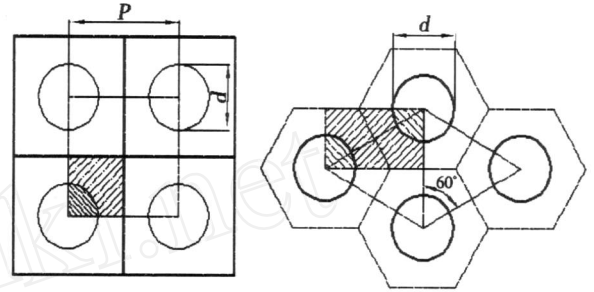


图 2 增强相的分布规律  
Fig 2 Distribution regularity of reinforced phase

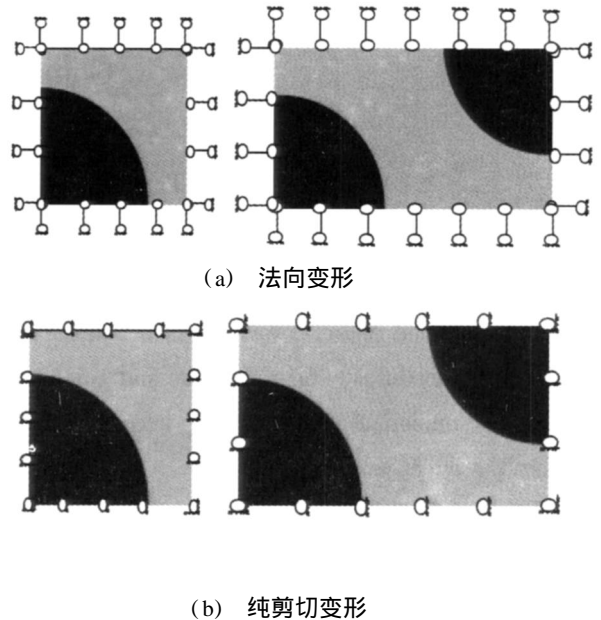


图 3 计算区域的边界条件  
Fig 3 Boundary condition of calculation region

### 2 材料的有效性能

应用直接平均法和二尺度展开法计算材料的有效弹性性能。这种两种方法已被证明在原理和数值上是完全相同的<sup>[8]</sup>。作为对照,同时采用这两种方法。对于直接平均法,施加均匀应变,计算相应的平均应力,而对于二尺度展开法,在代表体元上施加对应于单位均匀应变的初应力,计算其宏观刚度。局部或细观的应力 $\sigma_{ij}$ 和应变 $\epsilon_{ij}$ 的体积平均可以定义如下:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (1)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (2)$$

式中: 为 RVE,  $V$  是 RVE 的体积。根据平均应力和平均应变, 复合材料的有效刚度系数  $\bar{D}_{ijkl}$  或有效刚度系数  $\bar{C}_{ijkl}$  表示的有效性能定义如下:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{D}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad \text{或} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl} \quad (3)$$

直接平均法就是先计算方程 (1) 和 (2), 然后用方程 (3) 计算有效刚度。在二尺度展开法中<sup>[19]</sup>, 存在两个坐标系: 宏观尺度坐标  $x$  和细观尺度坐标  $y$ , 两个坐标之间的关系为  $y = x/\nu$ 。是一个非常小的正数, 表示一个单胞与整个结构体的大小之比。注意到对于一般函数  $F$  有

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x_i} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x_i} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial F(x, y)}{\partial y_i} \quad (4)$$

位移场可以渐近展开成

$$u_i = u_i^0(x) + \nu u_i^1(x, y) + \nu^2 u_i^2(x, y) + \dots \quad (5)$$

式中, 指数  $n$  表示函数与两个长度尺度相关, 而  $u_i^1, u_i^2, \dots$  表示细观位移。方程 (5) 的物理解释为: 细观点的非均匀性使真实位移  $u_i$  在平均位移周围快速振荡,  $u_i^1, u_i^2, \dots$  是细观结构的扰动位移。

由小变形状态的应变-位移关系可以求出应变  $\epsilon_{ij}$ 。  $D_{ijkl}$  是关于  $x$  和  $y$  的函数。局部应力-应变关系可表示为

$$\sigma_{ij}^n(x, y) = D_{ijkl}^n \epsilon_{kl}^n(x, y), \quad n = -1, 0, 1 \quad (6)$$

对于平均应力, 其表达式如下:

$$\sigma_{ij}^0 = D_{ijkl} \left( \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \quad (7)$$

其中  $\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l}$  代表平均应变,  $\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l}$  代表扰动应变。为了求解细观均匀性能, 引入函数  $u_i^{kl}(x, y)$ , 因而平均位移场  $u_i^0$  和扰动位移场  $u_i^1$  的关系可通过  $u_i^{kl}(x, y)$  表示为

$$u_i^1 = - \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} u_i^{kl}(x, y) \quad (8)$$

只要求出函数  $u_i^{kl}(x, y)$ , 就可以确定平均应力。将方程 (8) 代入式 (7), 得

$$\sigma_{ij}^0 = \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial}{\partial y_n} \right) \frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} \quad (9)$$

然后在整个代表体元上进行积分, 得到宏观弹性刚度

$$\bar{D}_{ijkl} = \frac{1}{V} \int_V \left( D_{ijkl} - D_{ijmn} \frac{\partial}{\partial y_n} \right) dY \quad (10)$$

一般来说, 可以用有限元方法计算出函数  $u_i^{kl}$ 。将  $u_i^{kl}(x, y)$  写成有限元形式的插值可表示为

$$u_i^{kl} = (N^i)^{kl} = (N^i)^{kl}, \quad i = 1, \dots, M \quad (11)$$

式中,  $N$  是形函数,  $i$  是节点的广义坐标,  $M$  表示 FE 系统中的自由度总数, 那么将  $u_i^{kl}(x, y)$  的标准有限元形式为

$$\left( \int_V B^T D B dY \right)^{kl} = \int_V B^T D^{kl} dY \quad (12)$$

式中,  $D$  为应力应变矩阵,  $B$  是和单元形函数相关的离散位移-应变矩阵;  $D^{kl}$  是应力应变矩阵  $D$  中的  $kl$  向量 (对于平面问题,  $kl=11, 22, 12$ ),  $^{kl}$  是与  $kl$  有关的特征位移向量。对不同的平面应变状态需要解 3 个类似于 (12) 的方程, 方程 (10) 定义的  $\bar{D}_{ijkl}$  可以表示为

$$\bar{D} = \frac{1}{V} \int_V D (I - B) dY \quad (13)$$

式中,  $I = (11, 22, 12)$ 。

### 3 数值计算

对于单向增强相为玻璃纤维, 树脂基体的复合材料, 取树脂基体材料弹性模量  $E_m = 3.45$  GPa, 泊松比  $\nu_m = 0.35$ , 剪切模量  $G_m = 1.83$  GPa; 玻璃纤维增强相的弹性模量  $E_f = 73.1$  GPa, 泊松比  $\nu_f = 0.22$ , 剪切模量  $G_f = 30.19$  GPa。选取的正方形单胞与正六边形单胞的横截面具有相同的面积, 并假设增强相的体积分数分别为 0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6 和 0.7。由于玻璃纤维在轴向无限长, 因而将其简化为平面应变问题。对于圆形玻璃纤维增强相, 用直接平均法和二尺度展开法可以直接求出有效刚度系数  $\bar{D}$ , 假设代表体元是近似各向同性的, 有效弹性模量、泊松比和剪切模量用如下公式计算

$$E = \frac{D_{11}(1 + \nu)}{1 - 2\nu}; \quad G = \frac{D_{66}}{2(1 + \nu)} \quad (14)$$

对于复合材料横向弹性模量  $E$  和剪切模量  $G$ , 文献 [10] 给出了以下表达式, 用于估算, 且该公式估算出的值为其实际值的下限

$$\frac{1}{E} = \frac{V_f}{E_f} + \frac{V_m}{E_m}; \quad \frac{1}{G} = \frac{V_f}{G_f} + \frac{V_m}{G_m} \quad (15)$$

表 1 列出了两种方法的数值模拟结果。

表 1 两种方法计算正方形分布的结构有效刚度系数<sup>1)</sup>

Table 1 Calculated effective stiffness coefficients of microstructure						
体积分 数比	$D_{11}$ / GPa		$D_{12}$ / GPa		$D_{66}$ / GPa	
	ASS	TEM	ASS	TEM	ASS	TEM
0.1	6.3234	6.3235	3.2825	3.2825	1.4803	1.4803
0.2	7.3345	7.3345	3.6026	3.6027	1.6918	1.6918
0.3	8.6736	8.6736	3.9290	3.9290	1.9356	1.9357
0.4	10.5047	10.5048	4.2527	4.2527	2.2434	2.2434
0.5	13.1305	13.1305	4.5760	4.5760	2.6757	2.6757
0.6	17.1154	17.1154	5.0300	5.0301	3.3580	3.3580
0.7	24.2395	24.2396	6.1010	6.1010	4.7815	4.7816

注: 1) ASS 表示直接平均法, TEM 表示二尺度展开法。

从表 1 可以看出,两种方法得到的结果几乎相等,说明了方法的正确性。随着纤维体积分数的增加,有效刚度系数逐渐增大。

为了清晰地反映玻璃纤维正三角形与正四角形分布方式对计算材料有效性能的差异,图 4 给出了两种分布方式下的细观结构刚性张量系数  $D_{11}$ 、 $D_{12}$  和  $D_{66}$  随纤维体积分数的变化曲线。从图中可以看出  $D_{11}$ 、 $D_{12}$  和  $D_{66}$  随着纤维体积分数的增大而增大,且正四角形分布方式下结构的  $D_{11}$  的值大于相同体积分数比下正三角形分布的;而正三角形分布方式结构的  $D_{12}$  和  $D_{66}$  大于相同体积分数比下正四角形分布的。这也表明:纤维体积分数比越大,结构所含的增强相材料越多,刚度张量系数也就越大。但是随着纤维体积分数比的增大,正四角形分布方式下结构的  $D_{11}$  大于相同体积分数比的  $D_{12}$ ,而  $D_{12}$  和  $D_{66}$  则刚好相反。

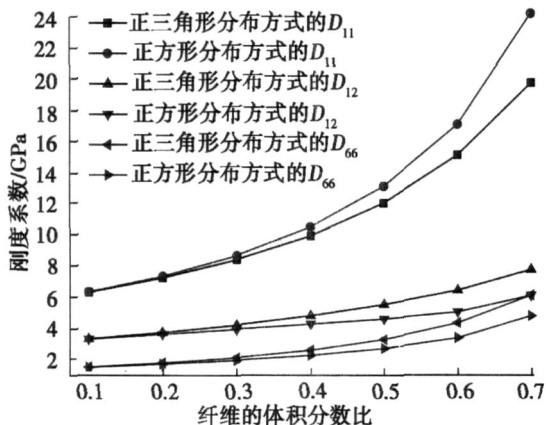
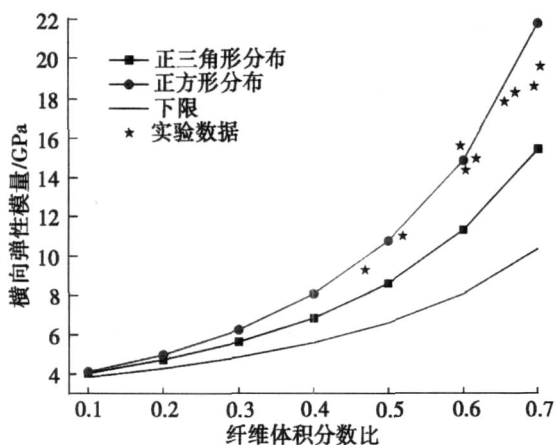


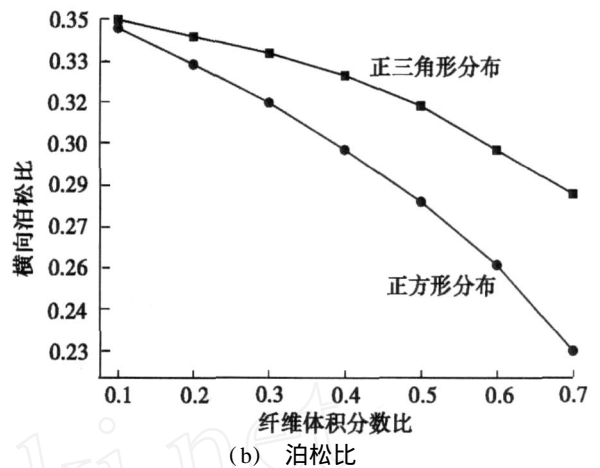
图 4 有效刚度系数随纤维体积分数比变化曲线

Fig 4 Effective stiffness coefficients

由公式 (14) 计算出材料的有效弹性模量和泊松比后,图 5 给出了两种分布方式下的弹性模量和泊松比随纤维体积分数比的变化曲线。



(a) 弹性模量



(b) 泊松比

图 5 横向弹性模量和泊松比随纤维体积分数的变化

Fig 5 Transverse Young's modulus and transverse poisson ratio of microstructure

从图 5 可以看出:纤维体积分数比越大,模型的弹性模量越大;对于同一纤维体积分数比,纤维为正方形分布的结构的弹性模量比正三角形分布的要大,且都大于公式 (15) 计算出的结果,因而证明了公式 (15) 计算出来的结果为估算复合材料有效弹性模量的下限。当纤维体积分数比越大,增强相材料就越大,基体材料也就越少,因而不不管是哪种分布方式,其结构的弹性模量都是随着纤维体积分数比的变大而变大,抵抗变形的能力增强。由二尺度展开法计算出来的弹性模量与实验结果吻合较好,从实验上验证了该理论的实际可行性。图 5 (b) 结果表明两组模型的横向泊松比都随着纤维体积分数比的增大而逐渐变小;对于同一体积分数比,纤维为正方形分布的结构的横向泊松比,比正三角形分布的要小。

由公式 (14) 计算出材料的有效剪切模量后,图 6 给出了两种分布方式下的横向剪切模量随纤维体积分数比的变化曲线。

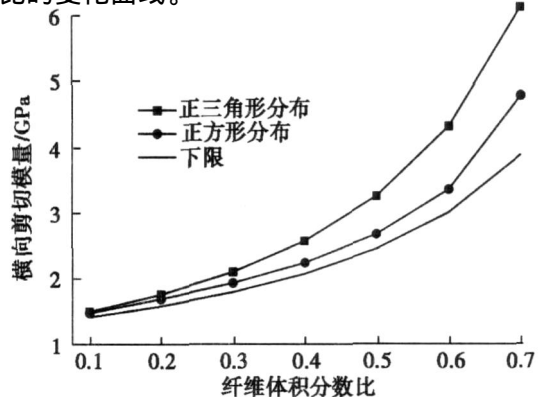


图 6 剪切模量随纤维体积分数比变化曲线

Fig 6 Transverse shear modulus

从图 6 中可以看出:纤维体积分数比越大,模型的剪切模量越大;对于同一纤维体积分数比,纤维为

正方形分布的结构的弹性模量比正三角形分布的要小,从图中也可以证明公式(15)计算出的结果为实际值的下限。剪切模量随着纤维体积分数比的增大而增大,也说明增强相材料增加大大地增强了复合材料的整体性能。

#### 4 结论

建立的细观力学模型,采用直接平均法与二尺度展开法计算出两种分布方式的有效刚度张量系数 $D_{11}$ 、 $D_{12}$ 和 $D_{66}$ ,以及横向弹性模量、泊松比和剪切模量均随着纤维体积分数比的增大而增大。这也说明随着纤维体积分数比的增大,增强相材料大大地增强了复合材料的整体性能。纤维为正方形分布的复合材料的弹性模量大于相同体积分数比下正三角形分布的;而泊松比和剪切模量,正方形分布方式的小于正三角形分布方式。因而对于材料的性能要求不同时,就可设计不同的增强相分布方式。

#### 参考文献

- 1 Hassani B, Hinton E A review of homogenization and topology optimization -homogenization theory for media with periodic structure Computers and Structures, 1998; 69: 707 ~ 717
- 2 Hassani B, Hinton E A review of homogenization and topology optimization -analytical and numerical solution of homogenization equations Computers and Structures, 1998; 69: 719 ~ 738

- 3 Peng Xiaoqi, Cao Jian A dual homogenization and finite element approach for material characterization of textile composites Composites: Part B, 2002; 33: 45 ~ 56
- 4 Yang Qingsheng, Wilfried Becker Numerical investigation for stress, strain and energy homogenization of orthotropic composite with periodic microstructure and non-symmetric inclusions Computers and Structures, 2004; 31: 169 ~ 180
- 5 雷友峰,魏德明,高德平.细观力学有限元法预测复合材料宏观有效性能模量.燃气涡轮试验与研究,2003; 16(3): 11 ~ 15
- 6 龚曙光,陈艳萍,谢桂兰.均匀化理论在多孔板结构优化中的应用研究.机械科学与技术,2004; 23(8): 995 ~ 998
- 7 杨庆生.复合材料细观结构力学与设计.北京:中国铁道出版社,2000
- 8 Yang Q S, Becker W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004; 6(4): 319 ~ 332
- 9 Yang Q S, Becker W. A comparative investigation of different homogenization methods for prediction of the macroscopic properties of composites Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2004; 6(4): 319 ~ 332
- 10 Kaw A K Mechanics of composite materials New York: CRC Press, 1997

(编辑 吴坚)

(范本)

### 《宇航材料工艺》编辑部 论文著作权转让书

论文中文文题:

论文英文文题:

作者(代表)联系电话:

电子邮箱:

全体作者姓名:

遵照《中华人民共和国著作权法》,上述论文全体作者同意将该论文之著作权中的财产权(含各种介质、媒体,以各种语言、各种形式出版的使用权),在全世界范围内转让给《宇航材料工艺》编辑部。本转让书自作者签字之日起生效。

若从《宇航材料工艺》编辑部收到本转让书之日起,作者在90日之内没有收到上述论文的修改意见或录用通知,则本转让书自动失效。

在签署本转让书时作者作如下保证并对其负全部责任:

- (1)上述论文是作者独立创作的原创性作品,未曾在国内外书刊上公开发表过;
- (2)该论文符合国家有关保密的规定(航天系统作者须同时附本单位的保密审查证明);
- (3)该论文不侵犯任何第三方的著作权及其他合法权利。

同时承诺:

- (1)《宇航材料工艺》没有向作者做出修改、录用或退稿通知之前(在前述限定的时间内),不将上述论文投往其他刊物;
- (2)签字作者保证其本人具有签署本转让书并做出各项承诺之全权;
- (3)有证据能证明未签字之作者授权签字作者代表其签署本转让书;本转让书对全体作者均有约束力。

作者(代表)签字:

年 月 日于 (地点)