

对称复合材料层板弹性模量和泊松比的计算

刘文庆¹ 姜秉元²

(1 上海大学材料研究所,上海 200072)

(2 洛阳工学院,洛阳 471039)

文 摘 推导出计算对称复合材料层板弹性模量,同时计算对称复合材料层板面内和厚度方向泊松比的计算公式。计算结果与其它文献的计算结果完全一样,且与实验值符合得很好。

关键词 复合材料层板,弹性模量,泊松比

Calculation of Elastic Modulus and Poisson's Ratio of Symmetrical Composite Laminates

Liu Wenqing¹ Jiang Bingyuan²

(1 Institute of Materials of Shanghai University, Shanghai 200072)

(2 Luoyang Institute of Technology, Luoyang 471039)

Abstract The formulas for calculating elastic modulus and Poisson's ratios in plane and along thickness for composite laminates are derived. All the calculating results with different formulas are equal completely and are in keeping with the experimental values.

Key words Composite laminate, Elastic modulus, Poisson's ratio

1 前言

单向层合板是指增强纤维在基体中按同一方向平行排列的板状复合材料,具有各向异性。工程中使用的复合材料主要是多向层合复合材料,多向层合板是由一叠单向层合板用与基体相同的材料粘合在一起的薄板,每一个单层称为层合板的一个铺层,各铺层中纤维的增强方向不一定相同,基体和纤维的材料也不一定相同。由于理论上多向层合板铺层关系有无穷多,而不同铺层关系的多向层合板的弹性模量和泊松比也不同,用实验测定所有多向层合板的弹性模量和泊松比显然不可能。文献[1,2]推导了计算对称复合材料层板面内泊松比的方法,文献[3,4]给出了计算对称复合材料层板厚度方向泊松比的公式。本文在文献[2]的基础上,用六阶矩阵的方法计算了对称复合材料层板弹性模量及同时计算出它们面内和厚度方向的泊松比,最后对部分计

算结果用实验进行了验证。

2 对称复合材料层板泊松比的计算公式

2.1 单向层合板的正轴弹性特性

图1是单向层合板示意图。

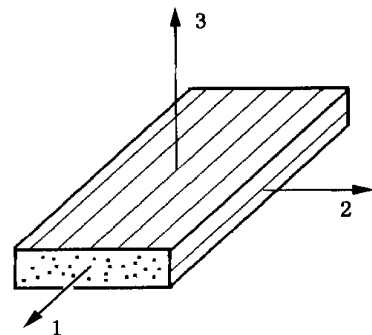


图1 单向层合板位向关系

Fig. 1 Reference frame for unidirectional laminate

收稿日期:2003-01-13

刘文庆,1968年出生,博士,主要从事核材料的研究工作

宇航材料工艺 2003年 第3期

1 方向为纤维方向,称轴向,弹性模量为 E_1 ;2 方向垂直于纤维,称为横向,弹性模量为 E_2 ;3 方向垂直于单向板平面,称为单向板的法向方向,弹性模量与 2 方向相同。在 23 坐标面内,纤维是随机分布的,宏观上把单向板看成是横观各向同性体,因此认

为 23 平面为各向同性面。我们一般只知道单向层合板的弹性模量 E_1 、 E_2 、切变模量 G_{12} 和泊松比 ν_{12} 、 ν_{21} 和 ν_{23} 。根据横观各向同性体的应力应变关系式,得到单向板在正轴坐标系中的应力应变关系:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (Q_{22} - Q_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 23 \\ 31 \\ 12 \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中 ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 表示正应力, γ_{23} 、 γ_{31} 、 γ_{12} 表示切应力, ϵ_1 、 ϵ_2 、 ϵ_3 表示正应变, γ_{23} 、 γ_{31} 、 γ_{12} 表示切应变。令 $\nu_{12} = (1 - \nu_{21} - \nu_{23}) / (1 + \nu_{23})$, 则刚度

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \nu_{21}^2) \\ Q_{12} &= E_1 \nu_{23} / (1 - \nu_{21}^2) \\ Q_{22} &= Q_{33} = E_2 (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \\ Q_{23} &= E_2 (\nu_{23} + \nu_{12} \nu_{21}) \\ Q_{55} &= Q_{66} = G_{12} \end{aligned}$$

用 $[Q]$ 表示式 (1) 中的刚度矩阵。

2.2 单向层合板的应力转轴公式

在对工程结构设计和分析时,所取的整体坐标系往往不可能与材料的正轴坐标系重合。设正轴坐标系和偏轴坐标系如图 2,正轴和偏轴坐标系中的应力分别称为正轴应力 $\{\sigma\}$ 和偏轴应力 $\{\sigma'\}$ 。

$[T]$ 为应力转换矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin^2 & 0 & 0 & 0 & -\sin 2 \\ \sin^2 & \cos^2 & 0 & 0 & 0 & \sin 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ \frac{1}{2} \sin 2 & -\frac{1}{2} \sin 2 & 0 & 0 & 0 & \cos 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

单向层合板的偏轴刚度矩阵为

$$[\bar{Q}] = [T] [Q] [T]^T \quad (4)$$

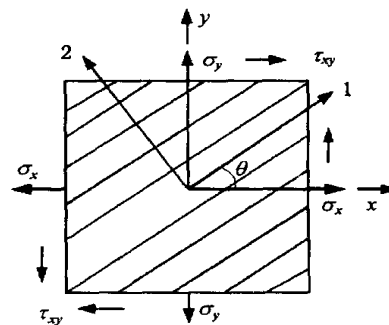


图 2 正轴坐标系和偏轴坐标系关系

Fig. 2 Relation between right coordinate and deflected coordinate

转化正轴应力为偏轴应力的公式为:

$$\{\sigma'\} = [T] \{\sigma\} \quad (2)$$

其中 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T$

$\{\sigma'\} = \{\sigma'_1 \quad \sigma'_2 \quad \sigma'_3 \quad \tau'_{23} \quad \tau'_{31} \quad \tau'_{12}\}^T$

偏轴单向层合板的应力应变关系为

$$\{\epsilon'\} = [\bar{Q}] \{\sigma'\} \quad (5)$$

2.3 多向层合板的弹性特性

经典理论^[5]研究多向层合板的弹性特性时有如下假定:(1)各单层之间粘结牢固不产生滑移,因而变形在层间是连续的;(2)各个单层处于平面应力状态;(3)变形前垂直于层合板中面的直线段,变形后仍为垂直于变形后中面的直线段,并且长度不变;(4)平行于中面的诸截面上的正应力与其它应力相比很小,可以忽略。本文对第三条假定作了修改,即变形前垂直于层合板中面的直线段,变形后仍为垂直于层合板中面的直线段,但由泊松定理知其长度发生了变化。

本文研究对称复合材料层板的泊松比,且只受平面应力,故对第二条假定作了具体限制,轴力 $N_x = 0$,轴力 $N_y = N_z = 0$ 和剪力 $N_{yz} = N_{zx} = N_{xy} = 0$ 。所以第 k 层单向板在 x, y 坐标系中的应力应变关系为:

$$\{\epsilon\}^k = [\bar{Q}]^k \{\sigma\}^k \quad (6)$$

式中 $[\bar{Q}]^k$ 是第 k 层单向板在 x, y 坐标系中的偏轴刚度阵。 $\{\sigma\}^k$ 是第 k 层单向板在 x, y 坐标系中的应力。

从层合板内取出一个面内尺寸为单位宽度 1×1 而高度为板厚 h 的平行六面体,如图 3 所示。

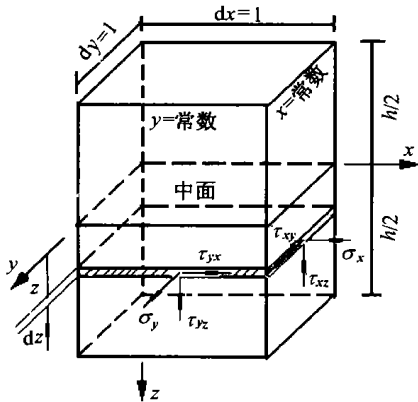


图 3 单位平行六面体应力示意图

Fig. 3 Stress sketch of a parallele hexahedron unit

则

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz \\ N_z &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z dz & N_{yz} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \\ N_{zx} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx} dz & N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz \end{aligned} \quad (7)$$

假设层合板一共 N 层,即

宇航材料工艺 2003 年 第 3 期

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \\ N_{yz} \\ N_{zx} \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{k=1}^N \begin{bmatrix} z_k \\ z_{k-1} \\ z \\ yz \\ zx \\ xy \end{bmatrix} dz \quad (8)$$

简记为

$$\{N\} = \int_{k=1}^N \{ \} dz = \int_{k=1}^N [\bar{Q}]^k \{ \} dz = \int_{k=1}^N \{ \} dz$$

其中

$$A_{ij} = \int_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (z_k - z_{k-1})$$

$[A]$ 的逆矩阵 $[a] = [A]^{-1}$ 为六阶柔量矩阵, a_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) 为柔量常数,所以应变为:

$$\{\epsilon\} = [a] \{N\}$$

因为只有 $N_x = 0$,可得

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11} N_x \\ \epsilon_y &= a_{12} N_x \\ \epsilon_z &= a_{13} N_x \end{aligned} \quad (9)$$

层合板的截面积为 $1 \times h = h$,当只有 $N_x = 0$ 时可得 x 方向弹性模量

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} = \frac{N_x}{\epsilon_x h} = \frac{1}{a_{11} h} \quad (10)$$

同样的方法可得 y 方向的弹性模量

$$E_y = \frac{\sigma_y}{\epsilon_y} = \frac{N_y}{\epsilon_y h} = \frac{1}{a_{22} h} \quad (11)$$

由此还可得到面内泊松比

$$\nu_{yx} = - \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = - \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (12)$$

厚度方向的泊松比

$$\nu_{zx} = - \frac{\epsilon_z}{\epsilon_x} = - \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad (13)$$

3 计算和实验结果

用上述方法对文献[1~4]中几种位向的复合材料层板进行了计算,与文献的计算结果完全一致。文献[6]用拉伸实验测量了铺层关系分别为(0°/60°/90°)s、(0°/15°/75°/15°)s的A、B两组碳/环氧树脂复合材料层合板的弹性模量 E_x, E_y 和面内泊松比 ν_{yx} ,本文进行了计算。本文制备了铺层关系为(15°/70°/15°/70°)s的一组玻璃纤维/环氧树脂复合

材料层合板(组别为 C),计算并用拉伸实验测量了弹性模量 E_x 和面内泊松比 ν_{yx} 。文献[3]用拉伸实验测量了铺层关系为 $(\pm 35^\circ / \pm 42^\circ / \pm 45^\circ)_{2s}$ 的(D组)碳/环氧树脂复合材料层合板的厚度方向泊松比 ν_{zx} ,计算结果和实验结果分别列于表 1 和表 2。计算结果和实验结果符合得很好。

表 1 多向复合材料层合板弹性模量的计算结果和实验结果

Tab. 1 Elastic modulus of composite laminates with calculation and experiment methods GPa

组别	E_x		E_y	
	计算值	实验值	计算值	实验值
A	47.000	46.699	79.450	79.110
B	98.837	83.013	38.288	32.620
C	19.071	18.650	17.456	

表 2 碳/环氧树脂几种铺层的面内和厚度方向泊松比

Tab. 2 In-plane and thickness poisson's ratios of three carbon/ epoxy composite laminates

组别	ν_{yx}		ν_{zx}	
	计算值	实验值	计算值	实验值
A	0.169	0.218	0.178	
B	-0.112	-0.093	0.534	
C	0.122	0.11	0.351	
D	1.299		-0.542	-0.48

为了研究铺层关系与泊松比的关系,计算了铺层关系为 $(\pm 12.5^\circ)_{2s}$ 的碳/环氧树脂复合材料的泊松比,图 4 为在 $\theta_1 = 12.5^\circ$, θ_2 在 0 到 180 范围内变化时的泊松比变化曲线,有以下规律:

(1) 铺层角度变化直接导致了泊松比的变化,但铺层顺序对泊松比没有影响;

(2) 面内泊松比和厚度方向泊松比随铺层角度变化而变化的趋势相反,即某一铺层的对称复合材料层板,当其面内泊松比为最大值时,其厚度方向泊松比基本为最小值;

(3) 复合材料纵向与横向弹性模量的差异越大,泊松比随角度变化愈显著,可以小于零,也可以大于 1。

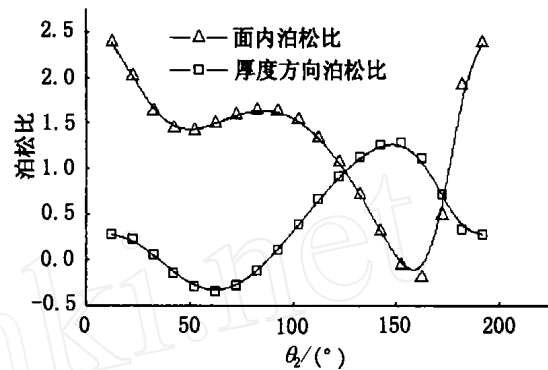


图 4 泊松比随角度变化曲线

Fig. 4 Poisson's ratios with angle

4 结论

通过与其它计算方法以及实验结果比较,证实本文介绍的计算方法是可靠的。这样就找到了一种可计算出对称复合材料层板弹性模量,同时计算出它们面内泊松比和厚度方向泊松比的方法,为设计对称复合材料层板弹性模量和研究面内泊松比和厚度方向泊松比的关系提供了有效的方法。

参考文献

- 张汝光. 复合材料负泊松比的设计. 玻璃钢, 1993; 9(2): 9~13
- 刘文庆, 姜秉元. 复合材料泊松比的设计及断裂特性. 纤维复合材料, 1996; 13(4): 5~9
- 李思简, 胥伟. 厚度方向零值与负值泊松比的均衡对称板. 见: 复合材料进展, 1993: 866~870
- Donoghue J P, Evans K E. Composite laminates with enhanced indentation and fracture resistance due to negative Poisson ratio. In: Proc ICCM- (8th Int Conf On Composite Materials), 1991: 55~61
- 王士杰. 复合材料力学导引. 重庆大学出版社, 1987: 71
- 姜秉元, 乔德瑞 J. 负泊松比石墨纤维/环氧树脂复合材料的断裂特性. 复合材料学报, 1992; 9(2): 55~61

(编辑 马晓艳)