

# 复合材料界面模态混合度研究

范学领<sup>1,3</sup> 孙 秦<sup>1</sup> 原梅妮<sup>2</sup> 菊池正纪<sup>3</sup>

(1 西北工业大学航空学院,西安 710072)

(2 西北工业大学材料学院,西安 710072)

(3 东京理科大学理工学部,日本千葉 278-8510)

**文 摘** 综述了消除复合材料界面裂纹应力奇异性及求解界面模态混合度的主要方法,分析讨论了各个方法的优缺点。通过分析讨论发现:模态混合度表征界面力学性能可以准确地描述界面裂纹尖端处各应变能释放率分量的振荡特性;求解与裂纹扩展长度无关的各应变能释放率分量及模态混合度是研究复合材料界面裂纹问题的难点;采用混合模态界面力学性能试验方法验证基于正则化长度等求解模态混合度方法的有效性,进而准确预测复合材料分层的发生及扩展是今后研究复合材料界面力学问题的发展方向。

**关键词** 模态混合度,应变能释放率,界面结合强度,复合材料分层,虚裂纹闭合方法

## Progress in Interfacial Mode Mixture of Laminated Composites

Fan Xueling<sup>1,3</sup> Sun Qin<sup>1</sup> Yuan Meini<sup>2</sup> Masanori Kikuchi<sup>3</sup>

(1 School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

(2 School of Materials, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710021)

(3 Faculty of Science and Engineering, Tokyo University of Science, Japan 278-8510)

**Abstract** A variety of methods adopted to eliminate the oscillatory singularity and obtain mode mixture of the interface crack are introduced and discussed in detail. The mode mixture characterized interfacial mechanical properties can precisely describe the oscillatory singularity of strain energy release rate (SERR) at the crack tip. More attention should be paid to obtain non-oscillatory strain energy release rate components and mode mixture. In addition, it is an imminent problem to use mixed-mode bending (MMB) test to validate the effectiveness of the numerical analysis of obtaining mode mixture, and further precisely predict the onset and propagation of delamination in laminated composites.

**Key words** Mode mixture, Strain energy release rate (SERR), Interface bonding strength, Delamination, Virtual crack closure-integral method (VCCM)

### 1 前言

复合材料层合板结构在航空、航天、汽车、船舶等工程领域得到了广泛的应用,但其较低的层间剪切强度及相邻铺层材料属性的突变使层间分离往往造成复合材料层合板失效,限制了它的应用。飞机上复合材料大约 60% 的破坏模式都是由层间分离所引起的<sup>[1]</sup>。图 1 为 Fiedler<sup>[2]</sup>用扫描电镜观察的 HTA12K/113 复合材料层合板在横向拉伸下的界面断裂形貌,

可以看到其主要失效形式是层间分离。复合材料分层常常发生在具有不同纤维方向的铺层之间,界面处几何及材料的不连续性导致裂纹尖端的应力场及位移场呈现出奇异性<sup>[3~4]</sup>。复合材料界面裂纹扩展情况极其复杂,裂纹尖端存在高度应力集中和应力场奇异性,仅用一般的弹性力学参数如应变能释放率、应力强度因子等不能准确的描述界面裂纹扩展过程<sup>[5~7]</sup>。

收稿日期:2008-07-28

基金项目:国家自然科学基金(50371069);教育部博士点基金(20030699013);博士创新基金(521030102-0400-W016133)

作者简介:范学领,1979 年出生,中日联合博士研究生,研究领域:飞行器设计,复合材料界面力学。E-mail: fanxuelingnpu@hotmail.com

为了有效描述裂纹尖端的应力奇异性,必须考虑界面裂纹尖端不同模态的耦合作用。通常采用复应力强度因子或模态混合度的概念来表征复合材料界面力学性能。相对于复应力强度因子,界面模态混合度的求解过程简单、精度较高,是描述复合材料界面力学性能的最有效方法<sup>[8~10]</sup>。O'Brien<sup>[6]</sup>和Chai<sup>[7]</sup>尝试使用 Griffith - Irwin 界面断裂韧性表征复合材料分层扩展的特征,结果发现 Griffith - Irwin 界面断裂韧性具有一定局限性,无法充分描述复合材料分层扩展的本质。复合材料分层扩展最重要的特征是任意外加荷载形式下,其断裂路径往往都限制在界面内,使得复合材料分层扩展实质上是混合模态作用的结果。模态混合度严重影响着复合材料层间断裂韧性,是控制复合材料破坏模式与增韧机理的关键参数<sup>[11~14]</sup>;所以从具有振荡特性的复合材料分层模型中获得可信的模态混合度受到了普遍的关注<sup>[15~18]</sup>。对于绝大多数的复合材料层间断裂分析来说,使用虚拟裂纹闭合方法得到的应变能释放率分量是虚拟裂纹扩展长度的函数,通常无法得到唯一的确定解<sup>[19~20]</sup>。尽管许多学者致力于求解不含振荡因子的应变能释放率分量和唯一的模态混合度,但目前为止仍没有某种方法能够被普遍接受<sup>[21~22]</sup>。

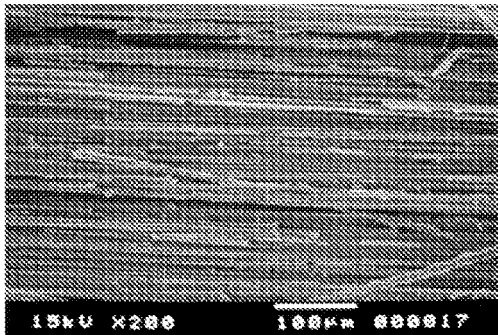


图1 HTA 12K/113 复合材料横向断裂表面  
Fig.1 SEM micrograph of transverse fracture surface (HTA12K/113 composite)

## 2 界面裂纹奇异性及模态混合度

不同材料间界面裂纹由于几何及材料的不连续性造成了应力奇异现象。Williams<sup>[3]</sup>通过特征函数方法建立了奇异应力场的近似特性,求得了界面裂纹的完整解析解。Williams 指出裂纹尖端的奇异应力场具有  $r^\xi$  ( $\xi = -\frac{1}{2} + i\varepsilon$ ) 的形式。其中震荡指数  $\varepsilon$  是裂纹处材料常数的函数(图2),定义为:

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \quad (1)$$

$\beta$  是二阶 Dundurs 参数,且:

$$\beta = \frac{\mu_1(\kappa_2 - 1) - \mu_2(\kappa_1 - 1)}{\mu_1(\kappa_2 + 1) + \mu_2(\kappa_1 + 1)}$$

其中下标 1 和 2 代表裂纹面上、下两种不同的材料;对于平面应变和平面应力, $\kappa$  分别等于  $(3 - 4\nu_j)$  和  $(3 - 4\nu_j)/(1 + \nu_j)$ ,  $\nu_j$  是泊松比; $\mu_j = E_j/[2(1 + \nu_j)]$  是剪切模量,  $E_j$  对应于两种材料的弹性模量。

界面裂纹尖端的应力奇异性使得通常的应力强度因子及应变能释放率不能有效的描述界面裂纹问题<sup>[23~24]</sup>。Rice 和 Sih<sup>[4]</sup>结合特征函数和复变量方法提出小范围接触区假设和界面裂纹复应力强度因子概念,获得了裂纹尖端附近的应力分量表达式。复应力强度因子  $K$  定义为:

$$K = K_I + iK_{II} = Kl^{i\varepsilon} = |K| e^{i\Psi} \quad (2)$$

式中,  $\Psi$  为模态混合度或称为相位角。模态混合度表征了裂纹尖端模态 I 和模态 II 的应力相对量<sup>[11~13]</sup>, 是影响界面裂纹断裂韧性的重要参数,可以表示为:

$$\Psi = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{yy}} \right)_{r=l} = \tan^{-1} \left( \frac{\text{Im} |K r^{i\varepsilon}|}{\text{Re} |K r^{i\varepsilon}|} \right)_{r=l} \quad (3)$$

式中  $l$  是选取的参考长度。

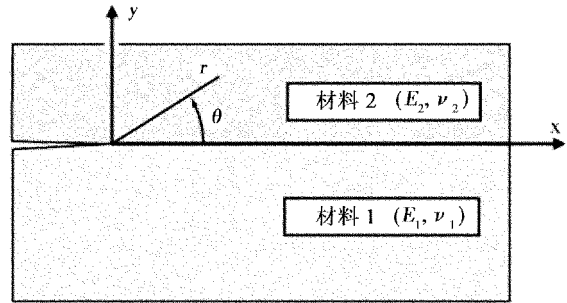


图2 界面裂纹示意图

Fig.2 Schematic of interface crack

## 3 界面裂纹振荡奇异性的消除方法

目前消除界面裂纹尖端应力奇异性及求解模态混合度的方法主要有三种:树脂夹层法、 $\beta=0$  法和有限裂纹扩展法。

### 3.1 树脂夹层法<sup>[25~26]</sup>

树脂夹层法建模时在裂纹所在界面增加一层树脂,使得裂纹完全位于均质材料内,从而达到消除界面裂纹应力场奇异性的目的。树脂夹层法的显著优点是不同材料间的界面裂纹问题转化为均质材料间的裂纹问题进行求解,可直接利用成熟的技术来分析不同材料间界面裂纹问题。树脂夹层法的不足之处有:(1)建模困难和计算效率低:附加的树脂层厚度通常较薄,为了精确的求解裂纹尖端的应力场及位移场,网格的划分必须足够精细,所以计算费用大,计算时间长;(2)附加的树脂层厚度及材料属性没有统一标准,并且很难定量描述它们对分析精度的影响。Hutchinson 和 Suo<sup>[27]</sup>通过对各向同性材料间夹层的研究表明,当插入的树脂层与其周围材料刚度有明显差异时,附加树脂材料属性的变化对应力强度因子及

模态混合度的影响很大;(3)没有考虑到混合模态下裂纹通常不能保持在附加树脂层内,通常向其上下界面分叉扩展的真实情况<sup>[25]</sup>。

### 3.2 $\beta=0$ 法<sup>[28-29]</sup>

$\beta=0$  法是在各向同性界面裂纹的解析方法基础上发展而来的<sup>[30-31]</sup>,是通过改变界面裂纹某个相对不重要的材料常数来消除应力场的振荡部分,其关键在于选择界面裂纹相对不重要且可以改变的材料常数。 $\beta=0$  法的最大优点是在不改变数值模型的基础上极大的降低了分析问题的难度。对于各向同性界面裂纹而言,绝大多数情况下振荡因子  $\varepsilon$  或 Dundurs 参数  $\beta$  的影响很小,因此改变材料参数使得  $\varepsilon$  为零,对所分析的问题并不会产生太大影响。分析复合材料问题时,通常改变其中一个铺层的泊松比使得振荡因子  $\varepsilon$  为零<sup>[28-29]</sup>。然而对各向异性材料界面裂纹而言,振荡因子对应变能释放率及模态混合度的影响不可忽略。同时  $\beta=0$  法仅适用于复合材料分层所在铺层的增强纤维方向与裂纹扩展方向一致的情况<sup>[32-33]</sup>。

### 3.3 有限裂纹扩展法<sup>[23,34-35]</sup>

有限裂纹扩展法在既不改变物理模型也不改变数值模型的前提下实现了消除裂纹尖端的应力奇异性。有限裂纹扩展的概念最初是 Rice<sup>[23]</sup> 在分析各向同性界面裂纹问题时提出的。Rice 认为虽然裂纹尖端存在严重的应力奇异现象,但只局限在裂纹尖端某个很小的范围内。在振荡区之外,模态混合度随裂纹尖端距离  $r$  的变化并不显著,因此在裂纹尖端某个适当的距离  $r$  处可以求得合理的模态混合度解。

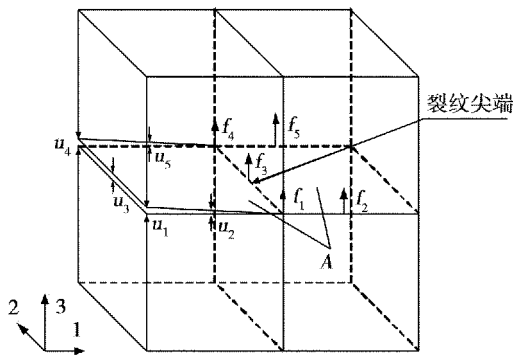


图3 虚裂纹闭合方法有限元实现  
Fig.3 Finite element mesh for VCCM

基于有限裂纹扩展这一思想所发展的有限元方法中,虚裂纹闭合方法是求解应力强度因子、应变能释放率及模态混合度最常用的方法<sup>[36-38]</sup>。它由 Rybichi<sup>[39]</sup> 首先提出,Raju<sup>[26]</sup> 将其扩展到三维问题分析,并在均质材料及非均质材料中得到了广泛的应用。

虚裂纹闭合方法假设裂纹扩展某个小量所需要的功与把裂纹闭合到初始长度所需要做的功相等。因此对应于模态 I 和模态 II 的应变能释放率及其分

量分别可以表示为:

$$G_I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \sigma_{yy}(\Delta - r) \delta_y(r) dr \quad (4)$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \int_0^{\Delta} \sigma_{xy}(\Delta - r) \delta_x(r) dr \quad (5)$$

$$G = G_I + G_{II} \quad (6)$$

式中, $\Delta$  是小的位移增量; $\sigma_{yy}$  与  $\sigma_{xy}$  分别是位于裂纹尖端前方  $r$  处的法向力和切向力; $\delta_x$  和  $\delta_y$  分别是裂纹尖端后方  $r$  处对应于模态 I 和模态 II 的相对位移(图 3)。

虚裂纹闭合方法具有以下优点:计算应变能释放率所需要的参数可以由有限元分析中一次得到,计算效率高;应变能释放率分量是通过裂纹尖端的三维应力、位移分布求得的,而不是由总的应变能释放率分解得到;模态混合度可以通过各应变能分量方便得到,分析不同问题时,采用相同的  $\Delta$  值可得到统一的模态混合度。基于上述原因,虚裂纹闭合方法成为求解应力强度因子、应变能释放率及求解模态混合度最常用的方法。

## 4 模态混合度的计算方法

基于虚裂纹闭合方法的有限元方法可以由裂纹尖端节点应力及节点位移方便的得到各个模态应变能释放率分量,进而得到模态混合度。但有限元分析中裂纹尖端存在应力奇异性,网格大小影响计算精确度,因此利用虚裂纹闭合方法所求得的应变能释放率分量及模态混合度的大小与单元尺寸密切相关<sup>[41-42]</sup>。通常裂纹尖端单元尺寸必须大于振荡指数  $\varepsilon$  的影响半径,避开裂纹尖端的振荡区,才能得到有效的模态混合度;同时单元尺寸必须足够小,使得求解过程在距离裂纹尖端非常近的  $K$  主导区进行<sup>[40]</sup>。值得注意的是,通常很难确定在距离裂纹尖端多远处应用虚裂纹闭合方法才是最恰当的<sup>[20-21,40]</sup>,因此确定合适的裂纹尖端单元尺寸成为有限裂纹扩展方法的主要难点之一。对于复合材料层合板,模态混合度是不唯一的,它随裂纹尖端单元尺寸(即裂纹闭合长度)的变化而变化<sup>[20-21]</sup>。因此提取与裂纹闭合长度无关的各应变能释放率分量及模态混合度成为近年来复合材料界面裂纹问题的主要研究课题,并相继出现了一些求解方法。

Suo<sup>[43]</sup> 分析了各向异性材料的层间裂纹问题,把裂纹尖端耦合的应力场和位移场分别定义为:

$$\sigma_H(r,0) = \sqrt{\frac{H_{22}}{H_{11}}} \sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{(K_1 + iK_2)r^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (7)$$

$$u_H(r,\pi) = \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22}}} \Delta u_2 + i\Delta u_1 =$$

$$\frac{2H_{II}(K_1 + iK_2) |r|^{(1/2+i\varepsilon)}}{\sqrt{2\pi r}(1 + 2i\varepsilon) \cosh(\pi\varepsilon)} \quad (8)$$

式中,  $\sigma_{12}$ 、 $\sigma_{22}$  分别对应于模态 II 和模态 I 应力场,  $\Delta u_1$ 、 $\Delta u_2$  分别对应于模态 II 和模态 I 位移场。

Qian<sup>[44]</sup>指出, 当裂纹扩展  $\Delta$  趋近于零时, 式(7)和式(8)所描述应变能释放率不收敛。从式(9)和式(10)可以清楚看到这种奇异性:

$$G_I = \frac{G}{2} + \frac{|d|G}{2A} \left[ \cos(a - \varphi) \cos\left(2\varepsilon \ln \frac{\Delta}{4a}\right) + \frac{|d|G}{2A} \left[ \sin(a - \varphi) \sin\left(2\varepsilon \ln \frac{\Delta}{4a}\right) \right] \right] \quad (9)$$

$$G_{II} = \frac{G}{2} - \frac{|d|G}{2A} \left[ \cos(a - \varphi) \cos\left(2\varepsilon \ln \frac{\Delta}{4a}\right) - \frac{|d|G}{2A} \left[ \sin(a - \varphi) \sin\left(2\varepsilon \ln \frac{\Delta}{4a}\right) \right] \right] \quad (10)$$

式中,  $a$  是半裂纹长度,  $d$ 、 $\varphi$  是与材料属性相关的变量。把式(9)和式(10)中与裂纹扩展  $\Delta$  无关的幅值部分定义为:

$$\bar{G}_I = \frac{G}{2} + \frac{|d|G}{2A} [\cos(a - \varphi) + \sin(a - \varphi)] \quad (11)$$

$$\bar{G}_{II} = \frac{G}{2} - \frac{|d|G}{2A} [\cos(a - \varphi) + \sin(a - \varphi)] \quad (12)$$

并把模态混合度定义为:

$$\Psi = \tan^{-1} \left( \frac{\bar{G}_{II}}{\bar{G}_I} \right) \quad (13)$$

Beuth<sup>[20]</sup>提出了另外一种求解不含振荡项的应变能释放率分量方法。该方法引入正则化长度参数得到了与单元尺寸无关的模态混合度。应变能释放率分量被描述为:

$$\begin{aligned} G_I &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\Delta} (\Phi_1 + \Phi_2) \\ G_{II} &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\Delta} (\Phi_1 - \Phi_2) \\ G &= G_I + G_{II} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta} \Phi_1 \end{aligned} \quad (14)$$

其中  $\Phi_1$  和  $\Phi_2$  分别为:

$$\Phi_1 = \frac{H_{II}}{2 \cosh^2(\pi\varepsilon)} K \bar{K} \Delta \quad (15)$$

$$\Phi_2 = \frac{2H_{II}\Delta}{\pi \cosh(\pi\varepsilon)} \times$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{(Khi\varepsilon)^2}{1 + 2i\varepsilon} \left( \frac{\Delta}{l} \right)^{2i\varepsilon} \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta (\cos \beta \sin \beta)^{2i\varepsilon} d\beta \right] \quad (16)$$

从式(15)和式(16)可以看出  $\Phi_1$  不含振荡因子, 振荡项只出现在  $\Phi_2$  的表达式中。

Beuth 通过引入正则化长度把式(16)中的振荡因子去除, 并定义了一个不含振荡项的新变量:

$$\Phi_2' = \frac{2H_{II}\Delta}{\pi \cosh(\pi\varepsilon)} \times$$

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{(Khi\varepsilon)^2}{1 + 2i\varepsilon} \int_0^{2\pi} \cos^2 \beta (\cos \beta \sin \beta)^{2i\varepsilon} d\beta \right] \quad (17)$$

从而, 与裂纹扩展长度  $\Delta$  无关的应变能释放率分量

及模态混合度分别为:

$$G_I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\Delta} (\Phi_1 + \Phi_2')$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{4\Delta} (\Phi_1 - \Phi_2') \quad (18)$$

$$\Psi = \tan^{-1} \sqrt{\frac{G_{II}}{G_I}} \quad (19)$$

Beuth 方法的优点是, 通过引入正则化长度消除了不同材料界面裂纹尖端的应力奇异性, 得到了与裂纹扩展尺寸无关的应变能释放率分量及模态混合度。近年来, 这个方法得到了广泛的应用<sup>[19,21~22,40]</sup>。

## 5 结语

通常采用经典的断裂力学知识描述裂纹尖端小范围屈服断裂现象, 诸如脆性断裂的发生、疲劳裂纹、应力腐蚀开裂等所谓的亚临界裂纹扩展等问题。对于复合材料分层来说, 界面处几何、材料的不连续导致裂纹尖端的应力场及位移场呈现出奇异性, 使得界面裂纹扩展情况极其复杂。采用模态混合度表征界面力学性能可以准确地描述界面裂纹尖端处的奇异性, 是研究复合材料界面裂纹问题的发展方向。

Qian 通过去除应变能释放率分量表达式中的奇异部分得到与裂纹扩展尺寸无关的模态混合度, 但此时所求得的已不是真正物理意义上的应变能释放率, 因此其合理性还需要进一步验证。Beuth 则通过引入正则化长度消除了裂纹尖端的应力奇异性, 从而得到了与裂纹扩展尺寸无关的应变能释放率及模态混合度。同时, 正则化长度的概念引入有利于在分析不同问题时得到统一的模态混合度。但目前尚没有具体的试验数据来验证该方法的有效性。当前迫切需要使用混合模态界面力学性能试验方法(如混合模态弯曲试验<sup>[45]</sup> - MMB: mixed mode bending)验证基于正则化长度等求解模态混合度方法的有效性, 并建立不同模态混合度下的界面力学性能与复合材料宏观性能之间的定量关系, 从而准确的预测复合材料分层的发生及扩展现象, 指导复合材料的制备工艺及其界面优化设计。

## 参考文献

- 1 Miller A G, Lowell D T, Seferis J C. The evolution of an aerospace material: Influence of design manufacturing and in-service performance. *Compos. Struct.*, 1994; 27: 193 ~ 206
- 2 Fiedler B, Hojo M, Ochiai S. The influence of thermal residual stresses on the transverse strength of CFRP using FEM. *Composites: Part A*, 2002; 33: 1 323 ~ 1 326
- 3 Williams M L. The stresses around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletins of the Seismological Society of America*, 1959; 49(2): 199 ~ 204
- 4 Rice J R, Sih G C. Plane problems of cracks in dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 1965; 32: 418 ~ 423
- 5 Comninou M. An overview of interface cracks. *Eng. Fract. Mech.*, 1990; 37: 197 ~ 208
- 6 O'Brien T K. Towards a damage tolerance philosophy for composite materials and structures. *Composite Materials: Testing and Design (Ninth Volume)*, ASTM STP 1059, 1990: 7 ~ 33

- 7 Chai H. Experimental evaluation of mixed ~ mode fracture in adhesive bonds. *Exp. Mech.*, 1992;296 ~ 303
- 8 Majumdar B S, Miracle D B. Interface measurements and applications in fiber-reinforced MMCs. *Key Eng. Mater.*, 1996; 116/117;153 ~ 172
- 9 Kalton A F, Howard S J, Janczk-rusch J et al. Measurement of interfacial fracture energy by single fiber push out testing and its application to the titanium silicon carbide system. *Acta Mater.*, 1998;9:3 175 ~ 3 189
- 10 Miravete A, Jimenez MA. Application of the finite element method to prediction of onset of delamination growth. *Appl. Mech. Rev.*, 2002;55(2):89 ~ 106
- 11 Evans A G, Ruhle M, Dalgleish B J, Charalambides P G. The fracture energy of bimaterial interfaces. *Mater. Sci. Eng. A*, 1990;126:53 ~ 64
- 12 Wang J S, Suo Z. Experimental determination of interfacial toughness curves using brazil-nut sandwiches. *Acta Mater.*, 1990;38(7):1 279 ~ 1 290
- 13 O' Dowd N P, Shih C F, Stout M G. Test geometries for measuring interfacial fracture toughness. *Int. J. Solids*, 1992; 29(5):571 ~ 589
- 14 Yuuki R, Liu J Q, Xu J Q et al. Mixed mode fracture criteria for an interface crack. *Eng. Fract. Mech.*, 1994;47(3): 367 ~ 377
- 15 Kardomateas G A. The initial postbuckling and growth behavior of internal delaminations in composite plates. *J. Appl. Mech.*, 1993;60:903 ~ 910
- 16 Kardomateas G A, Pelegri A A, Malik B. Growth of internal delaminations under cycle compression in composite plates. *J. Mech. Phys. Solid*, 1995;43(6):847 ~ 868
- 17 Blanco N, Gamstedt E K, Asp L E et al. Mixed-mode delamination growth in carbon fibre composite laminates under cyclic loading. *Int. J. Solids*, 2004;4 219 ~ 4 235
- 18 Bennati S, Valvo P S. Delamination growth in composite plates under compressive fatigue loads. *Sci. Technol.*, 2006; 66(27):248 ~ 254
- 19 Davidson B D. Evaluation of energy release rate-based approaches for predicting delamination growth in laminated composites. *Int. J. Fract.*, 2000;105:343 ~ 365
- 20 Beuth J L. Separation of crack extension modes in orthotropic delamination models. *Int. J. Fract.*, 1996;77:305 ~ 321
- 21 Agrawal A, Karlsson A M. Obtaining mode mixity for a biomaterial interface crack using the virtual crack closure technique. *Int. J. Fract.*, 2006;141:75 ~ 98
- 22 Tay T E. Characterization and analysis of delamination fracture in composites: An overview of developments from 1990 to 2001. *Appl. Mech. Rev.*, 2003;56(1):1 ~ 32
- 23 Rice J R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks. *J. Appl. Mech.*, 1988;55:98 ~ 103
- 24 Erdogan A H. Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks. *J. Appl. Mech.*, 1965;32:403 ~ 410
- 25 Atkinson C. On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics. *Int. J. Fract.*, 1977;13:807 ~ 820
- 26 Raju I S, Crews J H, Aminpour M A. Convergence of strain energy release rate components for edge-delaminated composite laminates. *Eng. Fract. Mech.*, 1988;30(3):383 ~ 396
- 27 Hutchinson J W, Suo Z. Mixed mode cracking in layered materials. *Adv. Appl. Mech.*, 1992;29:63 ~ 191
- 28 Davidson B D. Prediction of energy release rate for edge delamination using a crack tip element. *Fifth ASTM Symposium on Composite Materials: Fatigue and Fracture*, 1995;155 ~ 175
- 29 Davidson B D. Energy release rate determination for edge delamination under combined in-plane, bending and hygro-thermal loading. Part I -delamination at a single interface. *J. Compos. Mater.*, 1994;28:1 009 ~ 1 031
- 30 He M Y, Hutchinson J W. Kinking of a crack out of an interface. *J. Appl. Mech.*, 1989;56:270 ~ 278
- 31 Suo Z, Hutchinson J W. Sandwich test specimens for measuring interface crack toughness. *Mater. Sci. Eng. A*, 1989; 107:135 ~ 143
- 32 Davidson B D, Hu H, Schapery R A. An analytical crack tip element for layered elastic structures. *J. Appl. Mech.*, 1995;62(6):243 ~ 253
- 33 Davidson B D, Hu H. Effect of interlayer modulus on fracture mode ratio for interleaved composite laminates. *Eng. Fract. Mech.*, 1995;52(2):243 ~ 253
- 34 Sun C T, Manoharan M G. Strain energy release rates of an interfacial crack between two orthotropic solids. *J. Compos. Mater.*, 1989;23:460 ~ 478
- 35 Hwu C, Hu J S. Stress intensity factors and energy release rates of delaminations in composite laminates. *Eng. Fract. Mech.*, 1992;42(6):977 ~ 988
- 36 Kutlu Z, Chang F K. Composite panels containing multiple through-the-width delaminations and subjected to compression. Part I: analysis. *Compos. Struct.*, 1995;31:273 ~ 296
- 37 Pradhan S C, Tay T E. Three-dimensional finite element modelling of delamination growth in notched composite laminate under compression loading. *Eng. Fract. Mech.*, 1998;60(2):157 ~ 171
- 38 Martin R H. Incorporating interlaminar fracture mechanics into design. *Int. Conf. on Designing Cost Effective Composites*, London, 1998;83 ~ 92
- 39 Rybicki E F, Kanninen M F. A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral. *Eng. Fract. Mech.*, 1977;9:931 ~ 938
- 40 Agrawal Karlsson. On the reference length and mode mixity for a bimaterial. interface. *J. Eng. Mater. Tech.*, 2007;129(4):580 ~ 587
- 41 Toya M. On mode I and mode II energy release rates of an interface crack. *Int. J. Fract.*, 1992;56:345 ~ 352
- 42 Sun C T, Jih C J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media. *Eng. Fract. Mech.*, 1987;28(1):13 ~ 20
- 43 Suo Z. Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media. *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, 1990;427:331 ~ 358
- 44 Qian W, Sun C T. Methods for calculating stress intensity factors for interfacial cracks between two orthotropic solids. *Int. J. Solids Struct.*, 1998;35:3 317 ~ 3 330
- 45 Reeder J R, Crews J H. Non-linear analysis and redesign of the mixed-mode bending delamination test. *NASA Tech. Memo.*, 102777, 1991

(编辑 吴坚)