不同力学边界下梯度功能材料板稳态热应力*

许杨健 涂代惠

(河北工程学院,邯郸 056038)

文 摘 用有限元法研究了由 ZrO₂ 和 Ti-6Al-4V 组成的梯度功能材料板的稳态热应力问题,检验了 研究方法的正确性,给出了不同力学边界条件下该材料板的稳态热应力场分布。结果表明:无限自由长板内 的热应力最小;当无限长板只能伸长、不能弯曲时,板内稳态拉应力最大,比无限自由长板时板内最大拉应力 增大6.1倍;当无限长板的伸长、弯曲受限时,板内的压应力最大,比无限自由长板时板内最大压应力增大 12.0倍;此外,材料组分形状分布系数 M、对流换热系数、环境介质温度和孔隙度的变化对不同力学边界条 件下该材料板稳态热应力场的影响显著。此结果为该材料的设计和应用提供了准确的理论计算依据。

关键词 梯度功能材料板,稳态热应力,力学边界,对流换热边界,有限元法

Steady Thermal Stress of Functional Gradient Material Plate Under Different Mechanical Boundary

Xu Yangjian Tu Daihui (Hebei Engineering Institute, Handan 056038)

Abstract The steady thermal stress in the plate of a functional gradient material $(ZrO_2 \text{ and Ti-6Al-4V})$ (FGM) is analyzed with finite element method. The accuracy of this method is examined. The stress distributions under different mechanical boundary conditions are obtained. The results show that the thermal stress in the infinitely long traction-free plate of FGMs is the smallest. When there is only elongation without bending in the plate, the tensile stress is maximum, the maximum tensile stress is 7.1 times as large as those in the infinitely long traction-free plate. When elongation and bending of the plate are limited, the compressive stress is maximum and the maximum compressive stress is 13.0 times as large as those in the infinitely long traction-free plate. In addition, the effects of the changes of the parameter M of the material composition, the temperature of the surrounding medium, the porosity and the convective heat transfer coefficient on the steady thermal stresses are obvious. The results provide the foundations of theoretical calculation for the design and application of the material.

Key words FGM plate, Steady thermal stress, Mechanical boundary, Convective heat transfer boundary, Finite element method

1 引言

梯度功能材料(FGM)是一种新型的非均匀材料,具有远优于均匀材料的特殊性能,因而 FGM 的

- 38 -

宇航材料工艺 2004 年 第5 期

研究已成为当前材料科学领域的前沿热点之

一^[1,2]。由于它在航空、航天以及核反应堆等超高

温工作环境中的应用日益广泛,所以分析该材料组

收稿日期:2003-10-16;修回日期:2003-12-20

^{*}河北省教育厅资助项目:2003136

许杨健,1956年出生,副教授,主要从事固体力学教学和梯度功能材料的研究工作

成物体的热应力场十分重要。国外 Obata^[3]和 Tanigawa^[4]等人分别采用摄动法和分层解析法进行了研 究,但是这些方法过于繁杂,不便于工程应用。文献 [5]采用有限元法和有限差分法,成功地解决了处 在第一类边界条件下 FGM 板的瞬态温度场的计算 问题。本研究工作在此基础上,采用简便、有效的有 限元法,对处在不同力学边界条件下 FGM 板的对流 换热稳态热应力问题进行分析,以期得到对 FGM 的 生产和应用具有指导意义的结论。

2 分析模型

拟分析图 1 所示由 ZrO_2 和 Ti - 6Al - 4V 组成 的 FGM 无限长板在不同力学边界条件下的稳态热 应力场分布。假设:(1)该板沿厚度方向具有任意 分布和连续变化的材料性质;(2)该板的对流换热 边界条件为板的上、下表面外环境介质温度 为 T_b 和 T_a ,环境介质对板的对流换热系数为 $\zeta_b(T)$ 和 $\zeta_a(T)$;(3)该板周边绝热,其内部无内热源,厚度 为 b_b 坐标 y 选择如图 1 所示。



图 1 对流换热边界下 FGM 平板

Fig. 1 FGM plate under convective heat transfer boundary

3 热传导分析

3.1 控制方程组和泛函

设图 1 所示对流换热边界条件下 FGM 板的热 学性质为位置坐标 y 的函数,且在每一 y 坐标平面内 材料具有各向同性的性质,则该板的稳态热传导基 本方程为:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[k(y) \frac{\partial T(y)}{\partial y} \right] = 0 \tag{1}$$

其对流换热边界条件为:

$$\begin{cases} y = 0, k(y) \frac{\partial T(y)}{\partial y} - \zeta_{a}T(y) = -\zeta_{a}T_{a} \\ y = b, k(y) \frac{\partial T(y)}{\partial y} + \zeta_{b}T(y) = \zeta_{b}T_{b} \end{cases}$$
(2)

宇航材料工艺 2004 年 第5 期

式中,k(y)、T(y)分别为热导率和温度场函数。

当应用有限元法来近似求解以上控制方程组的稳态热传导问题时,需建立相应的泛函。在本文 假设条件下,FGM 板沿板厚方向的一维稳态热传 导问题在对流换热边界条件下的泛函(文献[6]中 5.1式)为:

$$\pi = \int_{a}^{b} \frac{1}{2} k(y) \left[\frac{\partial T(y)}{\partial y} \right]^{2} dy + \int_{\Gamma} \zeta \left[\frac{T^{2}(y)}{2} - \hat{T}_{\Gamma} T(y) \right] d\Gamma$$
(3)

式中, ζ 为对流换热系数($y = 0, \zeta = \zeta_a; y = b, \zeta = \zeta_b$), T_{Γ} 为环境介质温度, Γ 为给定对流换热条件的那部分边界。

3.2 热传导有限元基本方程

选用三角形单元,单元面积为Δ^{*},三个节点按 逆时针转向以*i*,*j*,*k*表示。在对流换热边界条件下的 稳态热传导有限元基本方程(文献[6]中5.26式) 为:

$$[H] \{T\} = \{P\}$$
(4)

式中, [H]为温度刚度矩阵, $\{T\}$ 为未知温度值的列向量, $\{P\}$ 为等式右端项组成的列向量, 矩阵[H]、 $\{P\}$ 中元素 h_{a}^{c} , p_{i}^{c} (r,s = i, j, k)分别等于;

$$h_{rs}^{e} = \frac{k^{e}}{4\Delta^{e}} (b_{r}b_{s} + c_{r}c_{s}) + \frac{\zeta^{e}}{3}s_{jk} \times \frac{1}{2} (1 + \delta_{rs}) (\delta_{rj} + \delta_{rk}) (\delta_{sj} + \delta_{sk})$$
(5)

$$p_{s}^{e} = \frac{\zeta^{e}}{2} T_{\Gamma} s_{jk} (\delta_{sj} + \delta_{sk})$$
 (6)

式中, b_r 、 b_s 、 c_r 和 c_s 为单元的几何参数, s_{jk} 为边界单元的jk边长,j和 k表示边界节点, δ_{rs} 为 Kronecker δ 符号。有限元法求解稳态温度场问题时,单元网格划分越细计算精度越高。

4 热弹性应力分析

设图 1 所示为对流换热边界条件下 FGM 无限 长板的热力学性质为位置坐标 y 的函数,且在每一 y 坐标平面内材料具有各向同性的性质,则该板的应 变分量 ε_{xx} 、 ε_{x} 和应力分量 σ_{xx} 、 σ_{x} 分别为^[4]:

$$\sigma_{xx}(\bar{y}) = \sigma_{x}(\bar{y}) = \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \times \left[\varepsilon_{0} + \frac{\bar{y}}{\bar{r}_{0}} - \alpha(\bar{y})T'(\bar{y})\right]$$
(8)

式中, $\bar{y} = y/b$ 为无量纲位置坐标, ε_0 、1/ $\bar{r}_0 = b/r_0$ 分 别为在 $\bar{y} = 0$ 表面上的应变分量和无量纲曲率, $E(\bar{y})_{\alpha}(\bar{y})$ 和 $\nu(\bar{y})$ 分别为线膨胀系数、弹性模量 和泊松比,这些材料性质可以沿板厚度方向任意变 化, $T'(\bar{y})$ 为温度变化函数。

在方程(2)中, ϵ_0 和1/ \bar{r}_0 为未知常数,它们由该板的力学边界条件确定。

(1) 假定该无限长板既能自由伸长,又能自由 弯曲(EfBf),则由下面的平衡方程确定未知常数:

$$\int_{0}^{1} \sigma_{xx}(\bar{y}) \bar{y} d\bar{y} = 0, \int_{0}^{1} \sigma_{xx}(\bar{y}) d\bar{y} = 0$$
(9)

将(8) 式代入(9) 式可解出未知常数,于是得:

$$\sigma_{xx}(\bar{y}) = \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \times \left[\frac{(B_2 D_0 - B_1 D_1) + (-B_1 D_0 + B_0 D_1) \bar{y}}{B_0 B_2 - B_1^2} - \alpha(\bar{y}) T'(\bar{y}) \right]$$
(10)

式中,

$$B_{i} = \int_{0}^{1} \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \bar{y}^{i} d\bar{y}, i = 0, 1, 2$$

$$D_{i} = \int_{0}^{1} \frac{\alpha(\bar{y}) E(\bar{y}) T'(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \bar{y}^{i} d\bar{y}, i = 0, 1$$
(11)

式中,B_i、D_i由辛普生数值积分法进行计算。

(2) 假定该无限长板只能自由伸长,不能自由 弯曲(EfBc),则由下面平衡方程确定未知常数:

$$\int_{0}^{1} \sigma_{xx}(\bar{y}) \,\mathrm{d}\bar{y} = 0, 1/\bar{r} = 0 \tag{12}$$

将(8) 式代入(12) 式可解出未知常数,于是得:

$$\sigma_{x}(\bar{y}) = \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \times \left[\frac{D_0}{B_0} - \alpha(\bar{y})T'(\bar{y})\right] \quad (13)$$

(3) 假定该无限长板不能自由伸长,只能自由 弯曲(EcBf),则由下面的平衡方程确定未知常数:

$$\varepsilon_0 = 0, \int_0^1 \sigma_{xx}(\bar{y}) \bar{y} d\bar{y} = 0 \qquad (14)$$

将(8) 式代人(14) 式可解出未知常数,于是得: - 40 --

$$\sigma_{zz}(\bar{y}) = \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \times \left[\frac{D_1 \bar{y}}{B_2} - \alpha(\bar{y}) T'(\bar{y})\right]$$
(15)

(4) 假定该无限长板既不能自由伸长,也不能 自由弯曲(EcBc),则由下面的平衡方程确定未知常 数:

$$\varepsilon_0 = 0, 1/\bar{r}_0 = 0$$
 (16)

将(8) 式代入(16) 式可解出未知常数,于是得:

$$\sigma_{xx}(\bar{y}) = \frac{E(\bar{y})}{1 - \nu(\bar{y})} \times [-\alpha(\bar{y})T'(\bar{y})] \quad (17)$$

应说明的是:E 表示 Elongation;B 表示 Bending;f 表示 Free;c 表示 Clamped。

求解思路是首先通过有限元基本方程(4)式, 求出 $T'(\bar{y})$ 、 $E(\bar{y})$ 、 $\alpha(\bar{y})$ 和 $\nu(\bar{y})$,然后代人(10)、 (13)、(15)和(17)式,即可求出不同力学边界条件 下 FGM 无限长板的稳态热应力 $\sigma_{xx}(\bar{y})$ 。

5 数值计算与分析

5.1 材料的物性值

以陶瓷 ZrO_2 和金属 Ti – 6Al – 4V 组成的 FGM 板作为分析算例。纯材料的性质见表 $1^{[3]}$ 。

表 1 ZrO₂ 和 Ti - 6Al - 4V 的材料性质

Tab. 1	Material	properties	of ZrO ₂	and	Ti –	-6A1	-4V
--------	----------	------------	---------------------	-----	------	------	-----

材料	热导率 ∕W・(m・K) ⁻¹	弹性模量 /GPa	泊松比	线膨胀系数 /10 ⁻⁶ K ⁻¹
ZrO ₂	2.09	151.0	1/3	10.0
Ti – 6Al – 4V	7.50	116.7	1/3	9.5

采用的金属相和陶瓷相的体积分数 $V_{m}(\bar{y})$ 、 $V_{v}(\bar{y})^{[4]}$ 和孔隙度 $P(\bar{y})^{[3]}$ 分别为:

$$V_{\rm m}(\bar{y}) = \begin{cases} 1 - \bar{y}^{M}, M \ge 1\\ (1 - \bar{y})^{1/M}, M < 1 \end{cases}, V_{\rm c}(\bar{y}) = 1 - V_{\rm m}(\bar{y})$$
(18)

$$P(\bar{y}) = A\bar{y}(1-\bar{y}), 0 \le A < 4$$
 (19)

式中,下标c表示陶瓷,m表示金属,M为材料组分的 分布形状系数,各种 M 值的金属体积分数 $V_m(\bar{y})$ 如 图 2 所示。

宇航材料工艺 2004年 第5期



弹性模量、线膨胀系数和泊松比。

5.2 热应力场分布与分析

设板厚为 10 mm。本研究在对流换热边界条件 下 FGM 板的有限元网格划分为 1 280 个单元和 1 282 个节点。

5.2.1 检验方法的正确性

设相对换热系数: $\bar{h}_{a} = \bar{h}_{b} = 1.0[(\bar{h}_{a}, \bar{h}_{b}) = b \times$ 宇航材料工艺 2004 年 第5期 $(\zeta_{a}/k_{m},\zeta_{b}/k_{o})];A = 0.0,M = 1.0,0.2,5.0;T_{a} = 300.0 K,T_{b} = 700.0 K_{o}$ 经本文解得的稳态温度分布如图 3 所示。分析可见,图 3 中的稳态温度分布曲线符合实际温度分布和热传导分布规律,另外,将图 3 中的稳态温度分布曲线与文献[4]图7 ~ 图9 中 τ = 10.0(即 t = 320 s,已达稳态)时的稳态温度分布 曲线从整体上进行比较可知:两种方法得到的温度 曲线的形状、弯曲程度、变化趋势以及对应点温度值 吻合较好。因此,本文方法正确可靠。



rig. 5 Distribution of steady temperatu

5.2.2 力学边界对热应力的影响

设参数及经解得的不同力学边界条件下 FGM 无限长板的稳态热应力分布见图 4。在满足本研究 工作模型条件下(当M=1.0时),由图4可知:(1) 当板处在 EfBf 时,由曲线①可知,此时板内的热应 力数值最小,且热应力曲线非常平缓,热应力梯度很 小;(2) 当板处在 EfBc 时,由曲线②可知,此时板内 的热应力由金属侧的拉应力变为陶瓷侧的压应力, 分别在陶瓷侧的压应力和在金属侧的拉应力达到最 大,比 EfBf 时板内最大拉应力增大 6.1 倍,最大压 应力增大4.2倍;(3)当板处在 EcBf 时,由曲线③可 知,此时板内的热应力由金属侧的压应力变为陶瓷 侧的拉应力,分别在陶瓷附近的拉应力和在金属侧 的压应力达到最大,比 EfBf 时板内最大拉应力增大 0.59倍,最大压应力增大2.2倍;(4)当板处在 EcBc 时,由曲线④可知,此时板内压应力由金属侧到陶瓷 侧呈下降趋势,不出现拉应力,并且压应力在陶瓷侧 -- 41 ---

远远大于金属侧,且热应力曲线坡度较陡,热应力梯 度较大,此外,板内的最大压应力数值比上述三种不 同力学边界时都大,其中,比 EfBf 时板内最大压应 力增大 12.0 倍。



5.2.3 对流换热系数对热应力的影响

设参数及经解得的不同力学边界条件下 FGM 无限长板的稳态热应力分布见图 5。





由图 4、图 5 的对比可知:当 $\bar{h}_{a} = \bar{h}_{b} = 1.0$ 时,稳 态热应力曲线上升和下降相对比较缓慢,热应力梯 度较小,但当 $\bar{h}_{a} = \bar{h}_{b} = 2000.0$ (相当于 $\bar{h}_{a} = \bar{h}_{b}$ 趋于无 - 42 -- 穷大),则稳态热应力曲线上升和下降相对比较迅速, 热应力梯度较大,其中在陶瓷附近更是如此。随着对 流换热系数的增大,当 $\bar{h}_{a} = \bar{h}_{b}$ 由 1.0 增大到 2 000.0 时,板内的最大拉、压应力也发生变化,具体分析如 下:(1)当板处在 EfBf(曲线①)和在 EfBc(曲线②) 时,板内的最大拉、压应力增加 2.3 倍;(2)当板处在 EcBf(曲线③)时,板内的最大压应力减小 46%,最大 拉应力增加 2.1 倍;(3)当板处在 EcBc(曲线④)时, 板内的最大压应力增加 1.2 倍(陶瓷表面)。因此,对 流换热系数的变化对板的稳态热应力分布有明显的 影响。

5.2.4 材料组分对热应力的影响

设参数及经解得不同力学边界条件下 FGM 板 的稳态热应力分布见图 6。(1) 当板处在 EfBf 时, 由图 6(a) 可知,板内的热应力变化最小,当 M =0.20时(曲线①),在金属附近热应力曲线较陡,热 应力梯度较大,而在陶瓷附近热应力曲线比较平 缓,热应力梯度较小;当M=5.0时(曲线③),在陶 瓷附近热应力曲线较陡,热应力梯度较大,而在金 属附近热应力曲线比较平缓,热应力梯度较小,且 在陶瓷侧压应力达到最大;当 M = 1.0 时(曲线 ②),在板中部拉应力达到最大。(2)当板处在 Ef-Bc时,由图6(b)可知,板内的热应力曲线均呈下 降趋势,并由金属侧的拉应力变为陶瓷侧的压应 力,约在板中部处热应力为0.当M = 0.2时(曲线 ①),板内的拉、压应力均达到最大,且热应力梯度 比曲线②、③大。(3)当板处在 EcBf 时,由图 6(c) 可知,板内的热应力曲线均呈上升趋势,并由金属 侧的压应力变为陶瓷侧的拉应力,约在板中部偏右 $(\bar{y} \approx 0.6)$ 处热应力为0,当M = 5.0时(曲线③). 板内的拉、压应力均达到最大。(4) 当板处在 EcBc 时,由图 6(d)可知,板内的热应力变化最大,板内 的热应力曲线均呈下降趋势,没有拉应力,曲线①、 ②、③之间的差异在金属附近较小,但在陶瓷附近 较大。当 M = 0.2 时(曲线①),在陶瓷侧的压应力 达到最大,且热应力梯度也最大。上述这些有规律 的现象均为各条热应力曲线采用了不同的分布形 状系数 M 和处在不同力学边界条件所致。因此, 分布形状系数 M 的变化对处在不同力学边界条件 宇航材料工艺 2004 年 第5 期









宇航材料工艺 2004 年 第5 期



5.2.5 环境介质温度对热应力的影响

设参数及经解得的不同力学边界条件下 FGM 无限长板的稳态热应力分布见图 7。由图 4、图 7 的 对比可知:在其它条件相同的情况下,当陶瓷表面的 环境介质温度 T_b 由 1 000 K 上升为 1 300 K 时,板 内的稳态拉、压应力也明显增大,经过分析可知:在 不同力学边界条件下无限长板内的最大拉、压应力 均增加 43%。因此,环境介质温度的变化对不同力 学边界条件下 FGM 板稳态热应力场分布有明显的 影响。



-- 43 --

5.2.6 孔隙度对热应力的影响

设参数(取空气的热导率 $k_a = 0.02757 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) 及经解得的不同力学边界条件下 FGM 无限长板的稳态热应力分布见图 8。根据图4、图 8 的对比可知:在其 它条件相同的情况下,当表征孔隙度的参数 A 由 0 变 为3.99时,板内的稳态拉、压应力也明显变化。(1)当 板处在 EfBf 时,由曲线①可知,板内的最大压应力增加 0.97 倍,最大拉应力增加 4.25 倍;(2)当板处在 EfBc 时,由曲线②可知,板内的最大压应力增加 1.23 倍(陶 瓷表面),最大拉应力增加 2.69 倍;(3)当板处在 EcBf 时,由曲线③可知,板内的最大压应力减小 84%,最大 拉应力增加 1.73 倍;(4)当板处在 EcBc 时,由曲线④ 可知,板内的最大压应力增加0.99倍(陶瓷表面)。因 此,孔隙度的变化对不同力学边界条件下 FGM 板稳态 热应力场分布有明显的影响。



图 8 孔隙度对稳态热应力的影响 Fig. 8 Effect of porosity on steady thermal stresses

(上接第26页)

4 结论

(1)使用 Talyscan 150 表面粗糙度测量仪测量 C/C 复合材料的烧蚀表面粗糙度,能有效地反映 C/ C 复合材料的烧蚀表面特征变化情况。

(2)基体组元为沥青碳时,与3D C/C 复合材料 相比,5D C/C 复合材料烧蚀表面粗糙度明显降低。

(3)含沉积碳和沥青碳组合基体的 3D C/C 复合 材料比含纯沥青碳基体的材料烧蚀表面粗糙度低。

参考文献

1 曾汉民,于翘,彭维周,蒲天游.碳纤维及其复合材料 - 44 —

6 结论

在文献[5]的基础上,给出了材料性质沿厚度 方向变化的 FGM 无限长板处在不同力学边界条件 下的稳态热应力问题的计算公式和稳态热应力场分 布,并检验了研究方法的正确性。在本文相同条件 下(*M*=1),FGM 无限自由长板(EfBf)内的热应力 最小,且热应力非常缓和;当板处在 EfBc 时,板内稳 态拉应力最大,且比 EfBf 时板内最大拉应力增大 6. 1 倍;当板处在 EcBc 时,板内的稳态压应力最大,且 比 EfBf 时的压应力增大 12.0 倍;此外,材料组分的 分布形状系数 M、对流换热系数、环境介质温度和孔 隙度的变化对不同力学边界条件下 FGM 板稳态热 应力场的影响显著。

参考文献

1 李臻熙,张同俊,李星国等.梯度功能材料的热应力 研究进展.宇航材料工艺,1997;27(6):1~5

2 张宇民,赫晓东,韩杰才.梯度功能材料.宇航材料工 艺,1998;28(5):5~10

3 Obata Y, Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradientmaterial. J. Thermal Stresses, 1994;17(3):471 ~487

4 Tanigawa Y, Akai T, Kawamura R et al. Transient heatconduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous platewith temperature-dependent material properties. J. Thermalstresses, $1996; 19(1): 77 \sim 102$

5 许杨健,赵志岗.梯度功能材料板瞬态温度场有限元 分析.功能材料,1999;30(1):103~106

6 王洪纲. 热弹性力学概论. 北京:清华大学出版社, 1989:167~172

(编辑 李洪泉)

显微图象.中山大学出版社,1991:59~185

2 杨炳尉. 弹道式再入飞行器的高性能端头. 国外导 弹技术,1985;(7):3~6

3 杨志翔,王金明等.复合材料表面二维轮廓分析和 三维形貌分析的比较研究.见:中国航天第十三专业信息网 2002 年度学术会议论文集,2002:37~41

4 俞汉清. 表面粗糙度标准及应用. 中国计量出版社, 1997:177

(编辑 李洪泉)

宇航材料工艺 2004 年 第5 期