

# 挠性板弯折的数值分析方法

胡亮 李欢 任桃桃 白俊磊 王一波

(上海航天控制技术研究所, 上海 201109)

**文 摘** 基于材料力学中梁弯曲的挠曲线方程,利用数值积分方法计算特定弯矩和剪力时挠性板的弯折曲线,同时利用曲线积分计算挠性板的长度,最终确定在给定长度和跨度情况下挠性板的弯折曲线以及对应的弯矩和剪力。利用有限元软件对相同模型在同一条件下进行模拟分析。将数值计算与有限元分析结果对比,发现两者变形曲线非常吻合,弯矩和剪力数值精度满足实际工程需求。基于上述数值计算方法,可以对挠性板弯折的各种参数进行分析和预估,对实际工程应用具有重要的指导意义。

**关键词** 挠性板,弯折,数值积分,有限元

中图分类号:O341

DOI:10.12044/j.issn.1007-2330.2022.03.003

## Numerical Analysis Method of Flexible Plate Bending

HU Liang LI Huan REN Taotao BAI Junlei WANG Yibo

(Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109)

**Abstract** The bending curve of flexible plate was calculated by numerical integral method at the specified bending moment and shearing force, based on the deflection equations of beams according to the mechanics of materials. The length of plate was also derived by line integrals in the meantime. Then the bending curve, moment and shearing force can be finally determined relative to the given length and span. The finite element software was employed to simulate the same model under the same conditions. Compared to the results of finite element method, it is found that the bending curves by numerical calculation were almost identical, in addition, the precision of the moments and forces can meet the practical demand in engineering. All the parameters of bending plate can be used for further analyzing and estimating based on the above numerical calculation method, which is valuable for guidance in the practical engineering applications.

**Key words** Flexible plate, Bending, Numerical integral, Finite element

### 0 引言

现阶段航空航天领域产品轻量化、小型化、集成化的趋势愈来愈明显,这对电路印制板结构、尺寸和可靠性的要求越来越高。刚挠结合印制板将传统PCB板与尺寸更小、安装方式更加灵活的挠性板结合在一起,不仅提高了电子系统连接的可靠性,还使得结构设计方式更加简单、可靠<sup>[1-2]</sup>。挠性板作为刚挠结合印制板的中间连接部件,制造工艺决定了其自身的刚度、强度等力学性质<sup>[3-4]</sup>,然而在实际使用中挠性板往往存在弯折情况,特别是直角弯折和翻转变折<sup>[5]</sup>,导致局部应力过大进而造成其失效。挠性板的长度设计需为弯折预留足够的操作空间,还应

使弯折到位后板内的应力尽量小,特别是挠性板与PCB板连接处,以及挠性板弯折曲率最大处<sup>[6]</sup>。

利用有限元分析软件可以方便地计算挠性板弯折的位移、变形、应力以及连接处的弯矩、剪力等情况<sup>[7-8]</sup>,但无法系统地给出各力学参数随挠性板长度变化的曲线,不便于在设计之初给出合适的设计参数。

本文以挠性板翻转变折为例,从材料力学中梁受力弯曲的挠曲线方程出发,利用数值积分方法求得给定弯矩和剪力情况下的挠性板弯折曲线,再以板长和跨度作为约束条件反算弯矩和剪力的取值<sup>[9]</sup>,在取得板长-跨度-弯矩-剪力4者关系曲线后作进

收稿日期:2021-02-03

第一作者简介:胡亮,1983年出生,高级工程师,主要从事导引头结构与数值仿真工作。E-mail:hl0538@126.com

一步的分析。

### 1 挠性板弯折的受力分析

一种典型的挠性板翻转弯折如图1所示。图中两块PCB板平行放置,其右侧端面重合,中间由等宽等厚的均匀挠性板连接,挠性板自由弯曲变形。

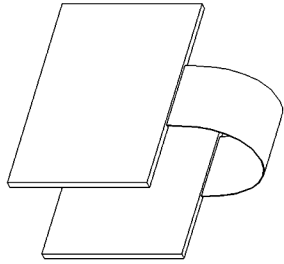


图1 挠性板弯折模型

Fig. 1 Model of bending flexible plate

挠性板为线弹性变形,采用材料力学中梁弯曲时的中性层假设,认为该层的长度在弯曲时无变化,截面内水平方向应力相同<sup>[10]</sup>,将问题简化为二维受力问题,挠性板的受力情况如图2所示。图中A、B点为挠性板中性层曲线的两端点,C点为曲线顶点,挠性板在两端点处收到弯矩和剪力的作用,挠性板总长为 $L$ ,弯折后AB跨度为 $D$ ,曲线高度为 $H$ 。

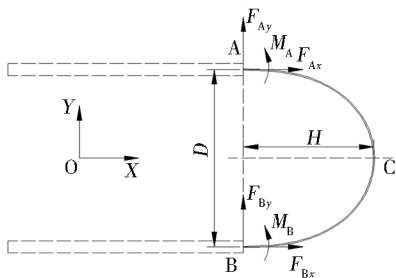


图2 挠性板弯折的受力分析

Fig. 2 Force analysis of the bending flexible plate

由于挠性板自由变形,其变形具有对称性,且 $X$ 方向的外力为零。只取上半部分AC段进行分析,将坐标原点取为A点,曲线上坐标为 $X$ 的一点P的受力如图3所示。

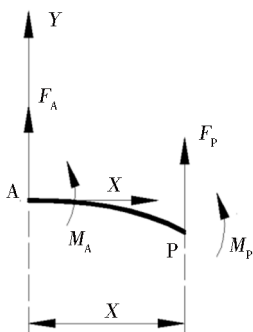


图3 挠性板变形曲线上任意一点的受力分析

Fig. 3 Force analysis of any point of the bending flexible plate

取力和力矩的正方向与坐标轴正方向相同且满足右手法则,由力和力矩平衡可知: $F_P = -F_A$ 及 $M_P = F_A x - M_A$ 。即曲线上各点的剪力相同,且力矩为:

$$M_x = F_A x - M_A \quad (1)$$

### 2 弯折曲线的数值积分

挠性板视为均一的线弹性材料,同时算例中梁的跨度远大于截面高度,因此根据材料力学中梁的挠曲线方程<sup>[10]</sup>,可得:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{M_x}{EI} \quad (2)$$

式中, $E$ 为挠性板材料的弹性模量, $I$ 为截面的惯性矩,矩形截面宽度为 $b$ ,高度为 $h$ ,则有 $I = bh^3/12$ 。

曲线二阶导数 $y''$ 与力矩 $M_x$ 符号相同,根据力矩方向定义,若 $M_x > 0$ (即力矩为逆时针方向),此时曲线具有上翘(下凸)趋势,对应的二阶导数 $y'' > 0$ 。注意到AC段的末端必然向内弯曲,即斜率为负且迅速减小,可知此处的力矩必然为负值。

将式(1)代入式(2)中,整理得:

$$y'' = \frac{F_A x - M_A}{EI} (1+y'^2)^{3/2} \quad (3)$$

已知 $x_0=0, y_0=0, y'_0=0$ ,上式可用数值积分的方法求取曲线的一阶和二阶导数,进而求得曲线方程。积分方法可选择欧拉法或四阶Runge-Kutta法<sup>[11]</sup>,后者具有更高的求解精度,且计算量不大,本文选择后者进行求解,递推公式如下:

$$\begin{cases} y'_{n+1} = y'_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_n, y'_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y'_n + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y'_n + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y'_n + h k_3) \end{cases} \quad (4)$$

式中, $h$ 为步长。坐标 $y$ 和弧长 $\Delta s$ 的递推采用前一点的一阶和二阶导数计算:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + y'_n h + \frac{1}{2} y''_n h^2 \\ \Delta s_n = h \sqrt{1 + (y'_{n-1} + \frac{1}{2} y''_{n-1} h)^2} \end{cases} \quad (5)$$

利用MATLAB软件编写计算程序,考虑到曲线末端斜率增加很快,采用变步长算法来减小计算误差。计算时以终点的斜率作为终止的条件,阈值取为-50 000。积分求解时需确定 $F_A$ 和 $M_A$ 的数值,为方便初值选取,考虑到此时挠性板受纯弯矩作用时其曲率理论上为常数,即弯曲曲线为半径为 $R$ 的圆弧,则有: $1/R = M_0/EI$ ,同时取 $F_0 = M_0/R$ 。挠性板长度为 $L$ ,则 $F_A$ 和 $M_A$ 的取值定义为:

$$M_A = K_M M_0 = K_M \frac{\pi EI}{L} \quad (6)$$

$$F_A = K_F F_0 = K_F \frac{\pi M_0}{L} \quad (7)$$

式中,  $K_M$  和  $K_F$  分别为力矩和力取值的系数。

MATLAB 中数值计算流程图如图 4 所示, 仿真计算所采用的参数见表 1。

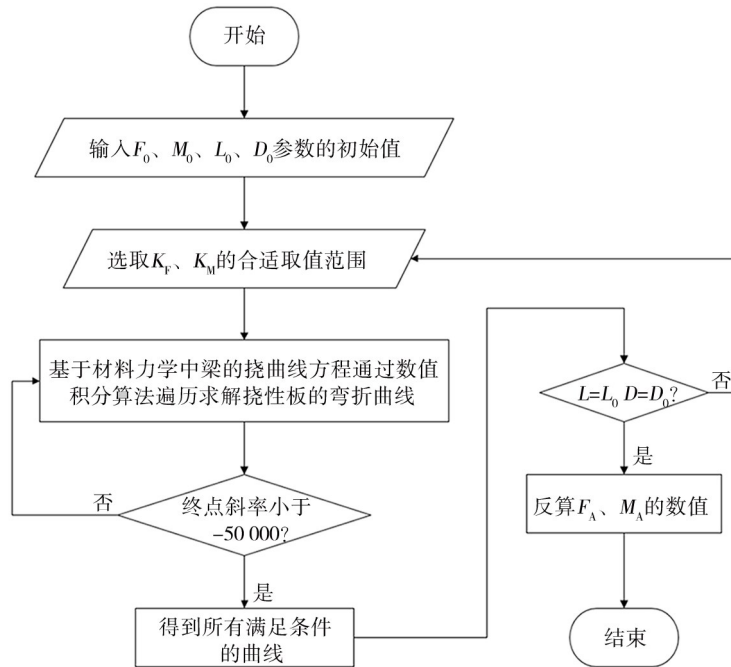


图 4 MATLAB 数值计算流程图

Fig. 4 Flow chart of the numerical calculation in MATLAB

表 1 仿真计算参数表

Tab. 1 Parameters of the simulate calculation

弹性模量	泊松比	挠性板长度	挠性板横截面宽度	挠性板横截面长度	弯矩系数	剪力系数
$E/\text{GPa}$	$\mu$	$L/\text{mm}$	$b/\text{mm}$	$h/\text{mm}$	$K_M$	$K_F$
3.50	0.34	60.00	20.00	0.20	$[-2.00, 4.00]$	$[-4.00, 6.00]$

对所有的组合分别求解, 结果如图 5 所示。图中数值积分工具对于每个  $K_M$  和  $K_F$  值下不同跨度曲线均进行求解, 同时曲线构型首先要满足同一长度条件和 AC 段(初始段)向下弯曲的条件。边界曲线以下部分为不满足初始段曲线向下弯曲构型的组合, 长度条件曲线为满足挠性线长度 60 mm 的组合, 跨度条件曲线为挠性线弯折后满足相应跨度的组合, 两者的交点即为同时满足长度和跨度条件的取值组合(求解精度为 1%)。

从图 5 中可以明显看到随着跨度不断增大, 跨度条件曲线向右侧移动, 且其右上段逐渐向长度条件曲线靠近, 满足相应跨度的取值组合点也在长度条件曲线上向右上移动。从数值上可以看出:

(1)  $D=2R$  时(本算例中  $R=60/\pi$ ), 剪力系数为 0, 力矩系数为 1, 符合梁纯弯曲构型时受力状态;

(2) 剪力绝对值随跨度增大首先逐渐减小, 剪力值减小为 0 后, 剪力改变方向, 且绝对值逐渐增大;

(3) 力矩绝对值随跨度增大同样先减小后增大,

但力矩方向改变时刻先于剪力。

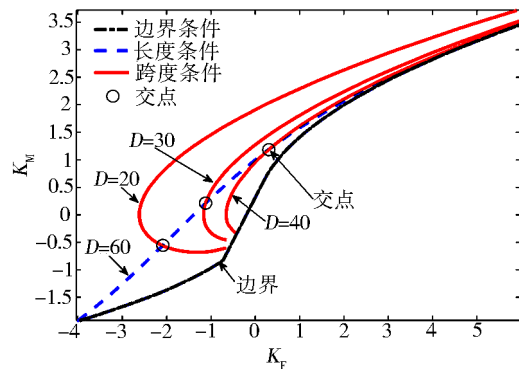


图 5 数值积分结果

Fig. 5 Numerical integration

### 3 有限元仿真验证

为验证数值分析结果的有效性, 本文用 ANSYS Workbench 软件对相同模型进行了有限元求解<sup>[12]</sup>, 仿真参数设置同前。得到挠性板弯折至跨度 30 和 20 mm 时的变形和应力情况, 如图 6 所示。

取挠性板中间层的变形曲线与数值积分结果,

由跨度为 30 和 20 mm 时的结果对比如图 7 可见, 两条变形曲线非常吻合, 对应点处误差最大值在 0.2

mm 左右, 越接近弯折顶点 C (积分末端) 误差越大。通过减小积分步长可提高积分精度, 减小误差。

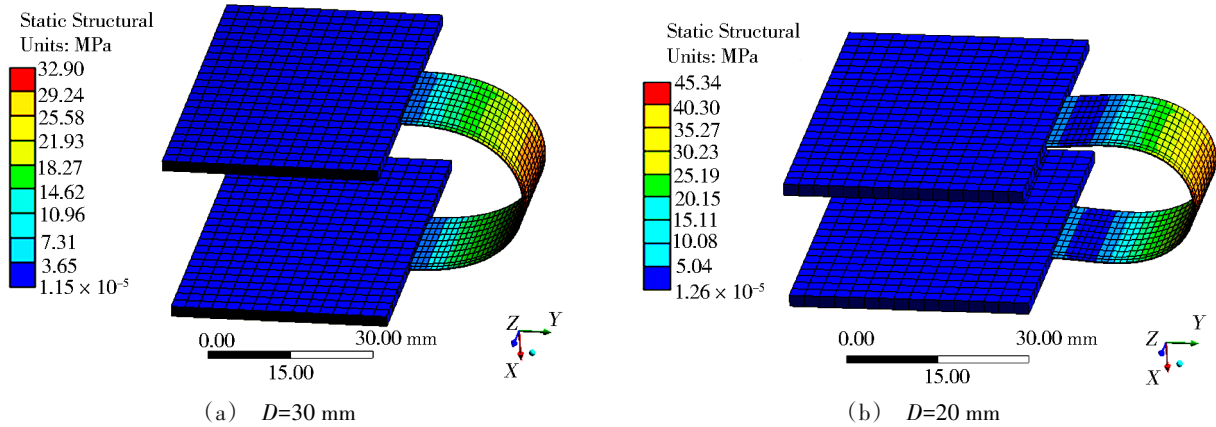


图 6 挠性板弯折应力的有限元仿真结果

Fig. 6 Simulation results of the bending stress of flexible plate in finite element method

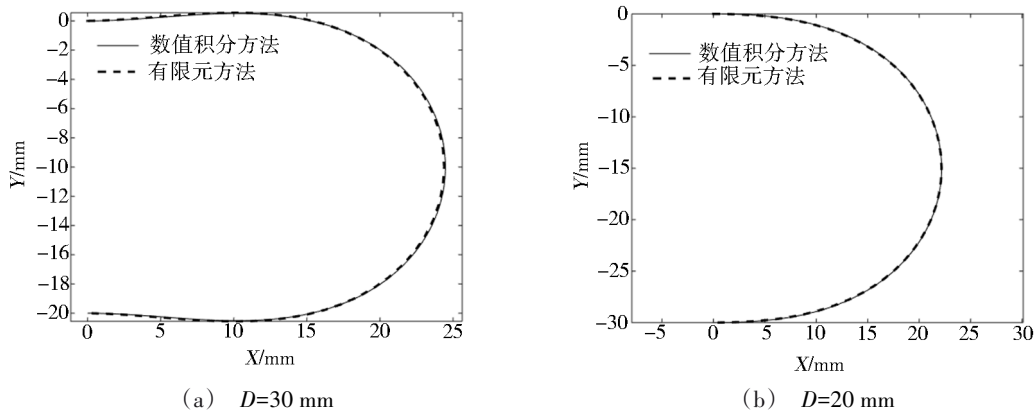


图 7 弯折曲线的数值积分与有限元仿真结果对比

Fig. 7 Comparison of the numerical integration and finite element simulation results of the bending curves

跨度为 5 ~ 50 mm 时两种方法计算的弯矩和剪力结果对比见表 2。两种方法的计算结果较为一致, 剪力的误差基本在 0.024 N 以下, 弯矩的误差基本在 0.504 N·mm 以下, 在两端处误差较大; 剪力和弯矩

的相对误差基本在 9% 以下。剪力相对误差最大出现在跨度为 40 mm 时 (接近圆弧弯曲), 此时剪力数值非常小, 较小的误差值引起了较大的相对误差。

两种方法的误差来源有: (1) 积分算法 (特别是

表 2 不同跨度时两种方法计算的弯矩和剪力计算结果对比

Tab. 2 Comparison of the bending moment and shearing force calculated by two methods in different span

跨度 D/mm	有限元仿真结果		数值仿真结果		剪力差值		弯矩差值	
	$F_1/N$	$M_1/N \cdot mm$	$F_2/N$	$M_2/N \cdot mm$	$\Delta F/N$	$\Delta F:F_1/\%$	$\Delta M/N \cdot mm$	$\Delta M:M_1/\%$
5	0.468	3.938	0.447	3.885	0.021	4.49	0.053	1.35
10	0.402	3.057	0.383	3.054	0.019	4.73	0.003	0.10
15	0.338	2.198	0.325	2.224	0.013	3.84	-0.026	-1.18
20	0.276	1.322	0.267	1.368	0.009	3.26	-0.046	-3.48
25	0.217	0.433	0.209	0.464	0.008	3.68	-0.031	-7.16
30	0.148	-0.568	0.143	-0.513	0.005	3.38	-0.055	9.68
35	0.073	-1.718	0.067	-1.588	0.006	8.22	-0.130	7.57
40	-0.035	-3.138	-0.040	-2.908	0.005	-14.29	-0.231	7.36
45	-0.219	-5.049	-0.226	-4.789	0.007	-3.20	-0.260	5.15
50	-0.627	-8.030	-0.603	-7.526	-0.024	3.83	-0.504	6.28

弧长)的递推公式;(2)积分步长的选择;(3)初始参数的间距;(4)对弯矩和变形方程的简化。后续可从以上几方面入手提高数值算法的计算精度。

#### 4 数值积分结果分析

基于数值积分的结果进一步分析各参数的关系,如图8所示。可以看出:(1)曲线高度 $H$ 随跨度 $D$ 增加逐渐减小;(2) $K_M$ 和 $K_F$ 数值随跨度 $D$ 增加单调增加且斜率迅速增大;(3) $K_M$ 和 $K_F$ 呈正相关关系(实际上该曲线即图5中的长度条件曲线)。采用多项式拟合的方式可以获得各参数的近似关系表达式,可应

用于后续数值积分的优化,以提高仿真结果的精度。

挠性板弯折曲线的形状与剪力和弯矩符号之间的关系如图9所示。联系图8(c)可知:(1)若 $F_A > 0$ ,必然有 $M_A > 0$ ,否则不满足曲线的构型,此时有 $D > 2R$ ;(2)若 $F_A = 0$ ,必然有 $M_A = M_0$ ,此时有 $D = 2R$ ;(3)若 $F_A < 0$ ,且 $M_A \geq 0$ ,此时 $D < 2R$ ,且曲线完全内缩无外扩段;(4)若 $F_A < 0$ ,且 $M_A < 0$ ,此时 $D < 2R$ ,且曲线存在外扩段(二阶导数先正后负),跨度临界值为27.44 mm。4种状况下跨度依次减小,高度逐渐增加。

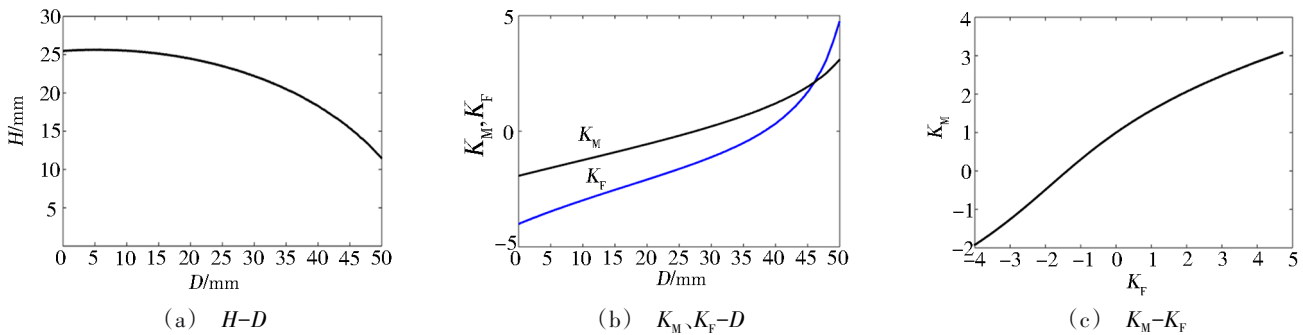


图8 各参数关系曲线

Fig. 8 Curves of the relationship of each parameter

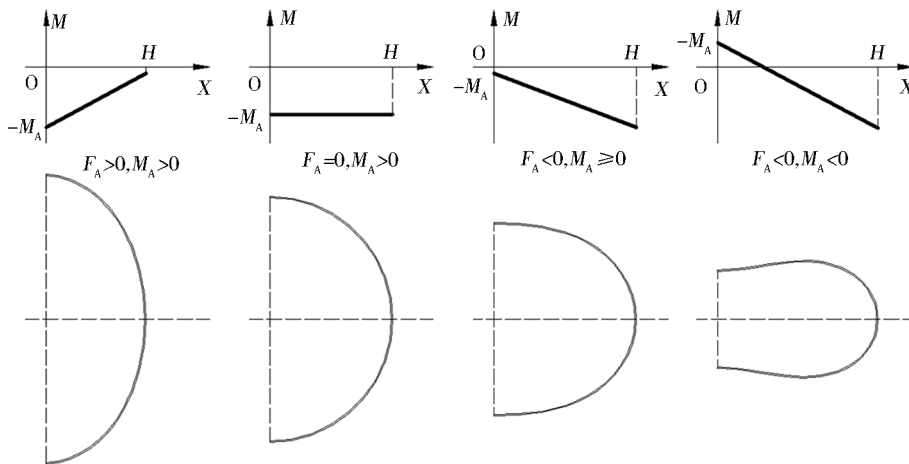


图9 参数符号与曲线形状的关系

Fig. 9 Relationship of the parameter sign and curve shape

在实际应用中,可以首先根据工程实际需求得到挠性板所需要的初始长度与跨度,然后利用数值仿真根据挠性板的力学性质下以及长度与跨度关系来判断其所承受的剪力与弯矩的方向和数值大小,再以剪应力或正应力为优化目标,在合理的约束下选取一系列可行的长度与跨度参数,最后得到同时兼顾操作工艺性和应力要求的挠性板构型。

#### 5 结论

本文首先对挠性板弯折进行受力分析,然后基于梁的挠曲线方程,将弯矩和剪力作为自变量,利用四阶 Runge-Kutta 方法计算了挠性板翻转弯折的曲

线构型,最后利用曲线长度和跨度反算来确定弯矩和剪力的数值,仿真计算得到的结论如下:

(1)将数值积分结果与 ANSYS Workbench 的有限元仿真结果相对比,发现两种计算方法得到的挠性板变形曲线非常吻合,弯矩和剪力数据非常接近;

(2)基于数值积分结果进一步分析弯矩、剪力与挠性板弯折曲线的跨度、高度间的关系,指出参数符号与弯折曲线构型间的关系,对工程设计具有一定的借鉴意义。

本文发展的数值积分方法可推广应用于挠性板的其他弯折情况,如直角弯折或特定角度弯折。由

于支撑反力的增加,自变量数量增加,需要有合适的优化方法配合计算。

### 参考文献

[1] 张煜堃,来林芳,白邈. 刚挠性印制电路板制造工艺技术及发展趋势[J]. 航天制造技术,2017(5):5-8.

ZHANG Yukun, LAI Linfang, BAI Miao. Development trend of rigid flex printed circuit board manufacturing process technology[J]. Aerospace Manufacturing Technology, 2017(5): 5-8.

[2] W. He, Y. Wang, B. He, et al. The manufacturing process and application of rigid-flex PCB[J]. World Sci-Tech R & D, 2005, 27(3): 16-19.

[3] 胡友作. 挠性PCB制作工艺参数优化研究与应用[D]. 硕士学位论文. 成都:电子科技大学,2013.

HU Youzuo. The parameter optimization of applied of FPC manufacture and application [D]. Master Thesis. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2013.

[4] 王海超,施海健,丁颖洁等. 基于数值模拟的印制电路板低透锡率焊盘焊接温度分析[J]. 宇航材料工艺,2020,50(4):30-34.

WANG Haichao, SHI Haijian, DING Yingjie, et al. Temperature analysis of low tin-permeability-rate pads of printed circuit board based on numerical simulation [J]. Aerospace Materials and Technology, 2020, 50(4): 30-34.

[5] 苏陟. 挠性电路板在高弯曲应力中的试验研究[D]. 硕士学位论文. 上海:上海交通大学,2007.

SU Zhi. Researches on high dynamic application of flexible printed circuits [D]. Master Thesis. Shanghai: Shanghai JiaoTong University, 2007.

[6] JIANG Z Y, HAN J T. A comparison of cover coat methods for electronic flexible printed circuit (E-FPC) based on

peeling strength[J]. Advanced Materials Research, 2011, 421: 489-492.

[7] CHAUDHURI R A. A simple and efficient shear-flexible plate bending element [J]. Computers & Structures, 1987, 25(6): 817-824.

[8] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社, 2003.

WANG Xucheng. Finite element method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.

[9] 赵志刚,王砚麟,苏程,等. 多机器人协调吊运系统逆运动学分析及优化[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(6): 643-651.

ZHAO Zhigang, WANG Yanlin, SU Cheng, et al. Analysis and optimization on inverse kinematics for multi-robot parallel lifting systems [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2017, 38(6): 643-651.

[10] 刘鸿文. 材料力学 I (第5版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2011.

LIU Hongwen. Mechanics of materials I [M]. Beijing: Higher Education Press, 2011.

[11] 同济大学计算数学教研室. 现代数值数学和计算[M]. 上海:同济大学出版社, 2004.

Tongji University Mathematical Staff room. Modern numerical mathematical and computation [M]. Shanghai: Tongji University Press, 2004.

[12] 洪文鹏,孟祥福,李欢,等. 红外导引头平台底座拓扑优化设计[J]. 飞控与探测, 2020, 3(2): 64-69.

HONG Wenpeng, MENG Xiangfu, LI Huan, et al. Topology optimization design of infrared seeker platform base [J]. Flight Control & Detection, 2019, 3(2): 64-69.