

纤维缠绕不等极孔椭球类容器的应力分析及优化

王 荣 何钦象 祖 磊

(西安理工大学工程力学系,西安 710054)

文 摘 基于微分几何推导出了不等极孔椭球类容器纤维缠绕的非测地线稳定缠绕方程,并根据薄膜理论、层合板理论、蔡-吴失效准则得到了赤道处纤维层的最小厚度 1.281 7 mm,计算出的纤维方向的应力小于纤维的极限强度 3.92 GPa。发现纤维缠绕椭球容器的应力状态是赤道处最先发生破坏,且会出现局部失效现象。以缠绕层最小质量 M 为目标函数,蔡-吴失效准则为约束条件,在给定内压 5 MPa 的情况下,得到了优化后的容器质量为 34.072 kg。相比于等极孔的容器而言,非测地线缠绕具有高度非线性、不稳定性及精度难以控制等问题。

关键词 不等极孔,纤维缠绕,非测地线,优化

中图分类号:TB332

DOI:10.3969/j.issn.1007-2330.2014.04.004

Stress Analysis and Optimization for Filament Wound Ellipsoidal Pressure Vessels With Unequal Polar Openings

WANG Rong HE Qinxiang ZU Lei

(Department of Engineering Mechanics, Xi'an University of Technology, Xi'an 710054)

Abstract Mechanical property of ellipsoid pressure vessels with unequal polar openings is studied in this paper. The steady formulas for filament on a surface of revolution are derived from differential geometry. Based on the membrane theory, laminate theory and Tsai-Wu failure criterion, the thickness of the equator is 1.281 7 mm, the stress value of the fiber direction is less than the fiber strength 3.92 GPa. The stress state of the filament wound ellipsoidal vessel is that the damage happens first in equator, and local failure phenomenon is happened. To minimum winding layers weight M as the objective function, Tsai-Wu failure criterion as the constraint condition, under the condition of 5 MPa internal pressure, we achieve the optimized weight is 34.072 kg. Compared to ellipsoid pressure vessels with equal polar openings, it has highly non-linear, instability and high precision.

Key words Unequal polar openings, Filament winding, Non-geodesic, Optimization

0 引言

基于测地线缠绕压力容器^[1-2]已广泛使用,但测地线缠绕受到各种条件的限制,例如缠绕构件的形状,缠绕的设计空间等,主要限制的是无法缠绕带有不等极孔的封头容器。

不等极孔容器的几何形状较传统等极孔容器复杂,传统的缠绕线型(如测地线等)难以适用,必须采用自由度较高的非测地线进行缠绕,非测地线存在高度非线性、不稳定性及精度难以控制等一系列计算问题,精确得到适用于不等极孔椭球容器的稳定非测地

线方程显得十分重要。国内外的研究人员已经对常见的圆柱形容器^[3]、球形容器^[4]、锥形容器^[5]、圆环容器^[6]和弯管^[7]等做出了关于测地线与非测地线的相关研究,但对于不等极孔椭球类容器的研究并不多^[8],尤其是关于其非测地线缠绕。本文针对不等极孔椭球类容器的几何特性,对纤维缠绕的可行性进行了分析,为研究不等极孔椭球类容器非测地线缠绕的设计和工艺提供了参考价值。

1 不等极孔椭球类容器的非测地线缠绕方程

芯模曲面上某一点的纤维所受的曲率半径方向

收稿日期:2014-05-22

基金项目:国家自然科学基金(1130216);陕西省自然科学基金(2013JQ6018)

作者简介:王荣,1988年出生,硕士研究生,主要从事复合材料纤维缠绕压力容器结构设计的研究。E-mail:rongwang421@163.com

通讯作者:何钦象,1957年出生,教授,硕士生导师,主要从事复合材料纤维缠绕压力容器结构设计的研究。E-mail:heqx@mail.xaut.edu.cn

的力 \vec{f}_s 可分解为 \vec{f}_n 和 \vec{f}_g 两部分 (图 1), 其中 \vec{f}_n 垂直于芯模表面, 与曲面的主法向量 \vec{n} 的方向相反; \vec{f}_g 沿着测地曲率的方向 \vec{g} 并且垂直于纤维的切线 t , 使得纤维产生滑移趋势。纤维非测地线缠绕时, 考虑到摩擦力 \vec{f}_f 与 \vec{f}_g 的方向相反, 因此为了达到纤维的非测地线稳定缠绕, 保证不滑线, $|\vec{f}_g|$ 应该小于最大摩擦力 $|\vec{f}_f|^{[9]}$ 。

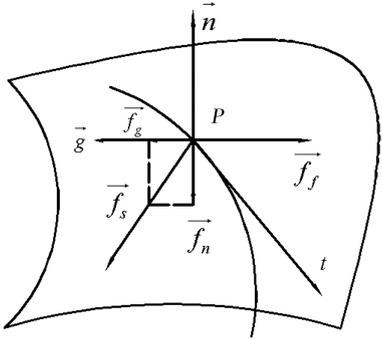


图 1 曲面上纤维在 P 点的受力关系

Fig. 1 Stress of the fiber at point P on a curved surface

滑移系数 λ 为法向力 \vec{f}_n 与横向力 \vec{f}_g 之比

$$\text{则 } \lambda = \frac{|\vec{f}_g|}{|\vec{f}_n|} = \frac{k_g}{k_n} \quad (1)$$

式中, k_g 为测地曲率; k_n 为法曲率。

假设空间任意一条曲线绕回转轴 z 旋转, 其轮廓轨迹是一个回转曲面, 从而形成椭球。

令椭球回转轴为三维直角坐标系的 z 轴 (图 2), P 为芯模表面上的一点, 称为落纱点, 按照右手定则建立直角坐标系, 则椭球回转体芯模曲面方程为

$$\begin{aligned} \vec{r}(u, v) &= \{r(u) \cos v, r(u) \sin v, g(u)\} \\ &= \{r(z) \cos \theta, r(z) \sin \theta, z\} \end{aligned} \quad (2)$$

式中, u, v 分别为经线和纬线的曲线坐标, $u = z, v = \theta; r(z)$ 为回转体母线方程; θ 为参数方程的中心角参量, 即线型转角。

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda [(1 + r'^2(z)) \sin^2 \alpha - r''(z)r(z) \cos^2 \alpha] - r'(z)(1 + r'^2(z)) \sin \alpha}{(1 + r'^2(z))^{\frac{3}{2}} r(z)} \quad (6)$$

故上式可变为

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dz} &= \frac{\lambda [(1 + r'^2(z)) \sin^2 \alpha - r(z)r''(z) \cos^2 \alpha] - (1 + r'^2(z)) r'(z) \sin \alpha}{r(z)(1 + r'^2(z)) \cos \alpha} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dz} &= \frac{\sqrt{1 + r'^2(z)}}{r(z)} \tan \alpha \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式确定了缠绕角的非测地线微分方程, 给出了缠绕中心角 θ 与缠绕角 α 的关系。因此, 要确定回

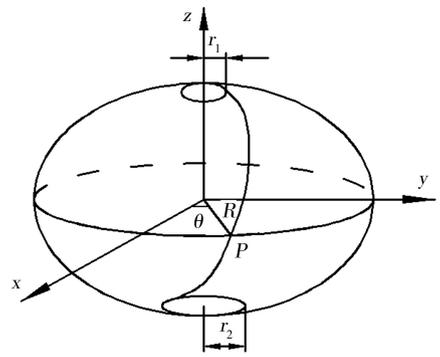


图 2 不等极孔椭球类容器模型

Fig. 2 Model of unequal polar openings ellipsoid pressure vessels

根据微分几何中关于回转曲面的性质, 回转曲面上的任意一条曲线都满足公式:

$$\sin \beta = \sqrt{G} \frac{dz}{ds} \quad \cos \beta = \sqrt{E} \frac{d\theta}{ds} \quad (3)$$

式中, β 是从曲线坐标 \vec{r}_θ 线到曲线切向量 \vec{T} 的有向夹角。由缠绕工艺可知, 缠绕角 α 为 \vec{r}_z 与切线 \vec{T} 之间的夹角, 则 $\alpha = 90^\circ - \beta$ 。

曲面在落纱点 $P(\theta, z)$ 处沿切方向的法曲率为

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{-r(z)}{\sqrt{1 + r'^2(z)}} + \frac{r''(z)}{\sqrt{1 + r'^2(z)}} \frac{dz^2}{d\theta^2} \\ &= \frac{r''(z)r(z) \tan^2 \beta - (1 + r'^2(z))}{(1 + r'^2(z))^{\frac{3}{2}} r(z) (1 + \tan^2 \beta)} \end{aligned} \quad (4)$$

根据刘维尔公式 (Liouville) 求得测地曲率为

$$\begin{aligned} k_g &= \frac{d\beta}{ds} - \frac{1}{2E\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \cos \beta + \frac{1}{2G\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial G}{\partial \theta} \cdot \sin \beta = \\ &= \frac{d\beta}{ds} - \frac{1}{2E\sqrt{G}} \cdot \frac{\partial E}{\partial z} \cdot \cos \beta = \frac{d\beta}{ds} - \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + r'^2(z)}} \cdot \frac{r'(z)}{r(z)} \end{aligned} \quad (5)$$

式中, s 为曲面的弧长参数。

将推导的法曲率 k_n 和测地曲率 k_g 代入式 $k_g = \lambda k_n$ 中, 整理后得

绕微分方程,求解微分方程就可以。对于上述方程,当 $\lambda=0$ 时,方程即为测地线缠绕方程。

本文采用高阶龙格库塔(Runge-Kutta)法^[10]求解非测地线微分方程,(7)式中滑移系数取值为 $\lambda_1=0.2, \lambda_2=0.119$,要求极孔处纤维与极孔边缘相切,缠绕角为 90° ,用以保证纤维通过下一个极孔时的顺利回头,利用MATLAB数学模拟软件,得到纤维缠绕迹图形(图3)。

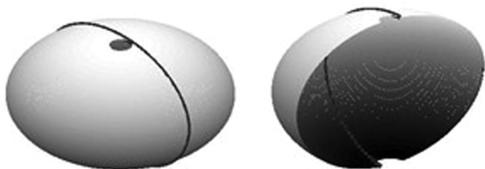


图3 不等极孔椭球类容器的非测地线缠绕
Fig.3 Non-geodesic filament-wound of unequal polar openings ellipsoid pressure vessels

2 回转薄壳的平衡方程

$$\begin{cases} R_1 = -\frac{[1+r'^2]^{\frac{3}{2}}}{r''} = \frac{[b^4 + (a^2 - b^2) \cdot z^2]^{\frac{3}{2}}}{ab^4} = \frac{[a^4 - (a^2 - b^2) \cdot r^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4b} \\ R_2 = r[1+r'^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{a \cdot [b^4 + (a^2 - b^2) \cdot z^2]^{\frac{1}{2}}}{b^2} = \frac{[a^4 - (a^2 - b^2) \cdot r^2]^{\frac{1}{2}}}{b} \end{cases} \quad (8)$$

2.2 平衡方程

取一微元体分析受力,令其在法线方向上内力等于外力,则可得出微体平衡方程。

$$\frac{\sigma_\varphi}{R_1} + \frac{\sigma_\theta}{R_2} = \frac{p}{t} \quad (9)$$

式中, σ_φ 为经向应力, σ_θ 为环向应力, R_1 为第一曲率半径, R_2 为第二曲率半径, p 为介质压力, t 为壳体壁厚。

此方程亦为拉普拉斯(Laplace)方程。令其在经向方向上内力等于外力,则可得

$$\sigma_\varphi = \frac{pr_m}{2t\cos\alpha} = \frac{pR_2}{2t} \quad (10)$$

由平衡方程可知

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi \left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right) \quad (11)$$

针对本文研究的不等极孔椭球类容器(图5),将第一和第二曲率半径代入方程(10)和(11)得

$$\begin{cases} \sigma_\varphi = \frac{p}{2t} \frac{[a^4 - r^2(a^2 - b^2)]^{\frac{1}{2}}}{b} \\ \sigma_\theta = \frac{p}{2t} \frac{[a^4 - r^2(a^2 - b^2)]^{\frac{1}{2}}}{b} \left[2 - \frac{a^4}{a^4 - r^2(a^2 - b^2)}\right] \end{cases} \quad (12)$$

2.1 回转壳体的几何要素

回转壳体的几何要素为第一曲率半径和第二曲率半径(图4)。

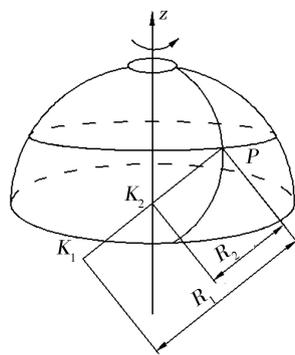


图4 回转壳体的几何要素

Fig.4 Geometric element of revolving shell

已知椭圆曲线方程为 $\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$,经数学推导可得椭球曲面的第一和第二曲率半径。

上式亦称为胡金伯格方程^[11]。

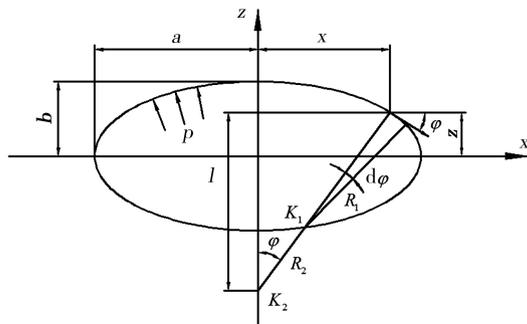


图5 椭球壳体示意图

Fig.5 Ellipsoid shell diagram

3 层合板理论

按照薄膜理论计算出的经向应力与环向应力,需要转换为正轴下的应力分量,也就是纤维方向上的应力才能进行失效分析,根据应力转换公式^[12]

$$\begin{cases} \{\sigma_1\} \\ \{\sigma_2\} \\ \{\tau_{12}\} \end{cases} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{cases} \{\sigma_\theta\} \\ \{\sigma_\varphi\} \\ \{\tau_{\theta\varphi}\} \end{cases} \quad (13)$$

式中, $m = \cos\alpha, n = \sin\alpha$ 。

4 失效分析

针对本文研究的不等极孔椭球类容器,采用蔡-吴失效准则,其表达式为

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\tau_{12}^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 \leq 1 \quad (14)$$

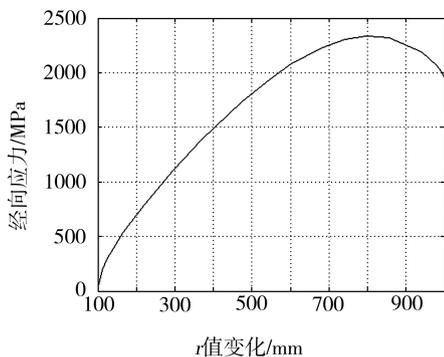
强度准则给出了单层壳体在偏轴应力或各种平面应力状态下判断其是否失效的判据。

可以根据计算出的极限强度反推出壳体赤道处的最大厚度,用于保证壳体整体的强度要求。将计算出的极限强度带入到由工艺方法计算出的厚度公式中,计算出赤道处满足极限强度所需要最小厚度,保证赤道处能够满足强度要求,然后根据母线上其余各点的极限强度,代入到厚度计算公式中,可以得到满足母线上各点强度要求的赤道处的多个厚度,选出最大厚度,即为我们要求的赤道处的厚度。赤道处纤维缠绕层最薄,通过上述方法计算出的厚度,既满足了赤道处的强度要求,也满足母线上其他各点的强度要求。

5 满足强度的厚度计算及应力分析

5.1 厚度计算

令蔡-吴失效准则的等式结果为 1,根据通过薄膜理论、层合板理论计算应力分量的公式,在给容器施加 5 MPa 的内压,可以得出最终计算的赤道处的



(a) 经向应力

纤维层厚度。

令 A 为螺旋绕组纤维的纵横截面积^[13],则

$$A = 2\pi R t_{\alpha} \cos\alpha_0 = 2\pi r t_f \cos\alpha \quad (15)$$

式中, t_f 为任一平行圆处的纤维厚度; t_{α} 为赤道处的纤维厚度。

于是得到用平行圆处的厚度表示赤道处厚度的表达式

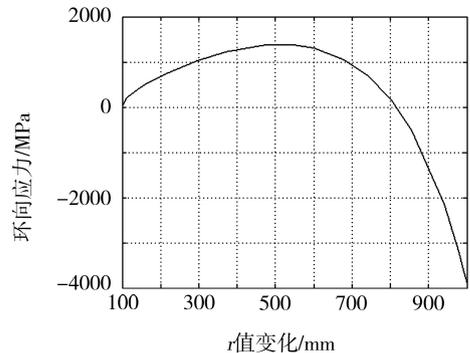
$$t_{\alpha} = \frac{r \cos\alpha}{R \cos\alpha_0} \cdot t_f \quad (16)$$

将应用蔡-吴准则计算出的满足母线上不同点强度要求的厚度分别代入上式中,可以得出满足母线上不同点强度要求的赤道处的厚度,选取最大值,该厚度即为最终满足容器强度要求的赤道处的最终厚度,计算结果为 1.281 7 mm。

5.2 应力分析

5.2.1 经向应力与环向应力

根据计算出的纤维层厚度,应用薄膜理论可以计算出椭圆母线上点的经向应力 σ_{φ} 和环向应力 σ_{θ} ,结果如图 6 所示。



(b) 环向应力

图 6 壳体应力值

Fig. 6 Stress value of the shell

根据经向应力与环向应力的计算结果可以看出:

(1) 椭圆壳上各点的应力是不相等的,它与各点的坐标是有关系的:

在 $r=0$ 的壳体极点处,

$$R_1 = R_2 = \frac{a^2}{b}, \sigma_{\varphi} = \sigma_{\theta} = \frac{pa^2}{2bt}$$

在 $r=a$ 壳体赤道处,

$$R_1 = \frac{b^2}{a}, R_2 = a, \sigma_{\varphi} = \frac{pa}{2t}, \sigma_{\theta} = \frac{pa}{t} \left(1 - \frac{a^2}{2b^2} \right)$$

(2) 椭圆壳应力与内压 p 和壁厚 t 有关,并且还与长轴与短轴之比 a/b 有关, a/b 的值越大,椭圆壳的应力也就越大。经向应力 σ_{φ} 在任何 a/b 值下均为拉应力;环向应力 σ_{θ} 在 $a/b < \sqrt{2}$ 时为拉应力,在 $a/b > \sqrt{2}$ 时为压应力。本文采用的是标准椭圆形,即 a/b

$= 2$,在极点处 $\sigma_{\theta} = \frac{pa}{t}$,在赤道处 $\sigma_{\theta} = -\frac{pa}{t}$,环向应力从拉应力变为压应力。

(3) 赤道附近的经向应力和环向应力均较大,说明赤道附近最先发生破坏。

5.2.2 纤维方向应力

在上一节中,运用薄膜理论计算出了椭圆母线上点的经向应力 σ_{φ} 和环向应力 σ_{θ} ,即 σ_x 和 σ_y ,代入到应力转换公式中,可以计算出纤维方向的应力(图 7)。由计算出的纤维方向的应力可知,在给定内压 5 MPa 的情况下,纤维方向的应力小于纤维的极限强度 3.92 GPa。根据应力变化可以得到椭圆容器的应力状态,赤道处最先发生破坏,且会出现局部失效现象,失效的原因与 a/b 的比值有关。

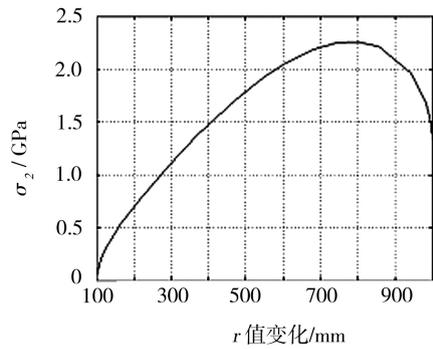
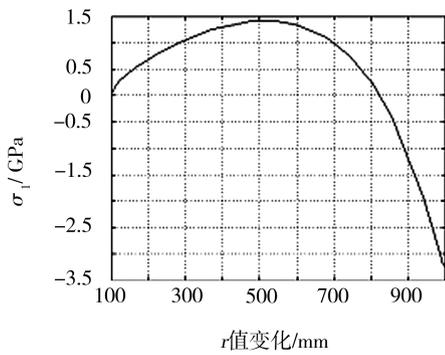


图7 纤维方向应力值

Fig.7 Stress value of the fiber direction

6 不等极孔椭球类容器的优化

6.1 优化目标及约束条件

纤维缠绕压力容器主要用于航空航天工业中,因此不仅需要较好的刚度和强度,还要实现整体结构的轻量化。因此在满足稳定缠绕和强度要求的前提下,将优化目标设定为质量,要求质量最小。

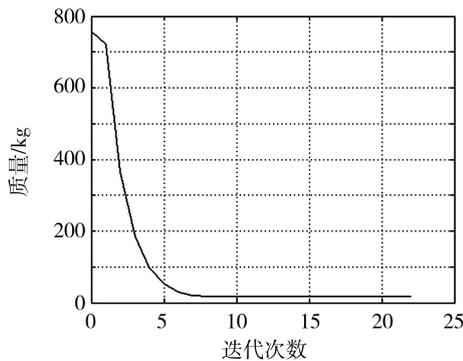
$$M = V \cdot \rho = -2\pi R \rho \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha} \cdot t \int_R^{r_0} \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)r^2}}{a\sqrt{a^2 - r^2}} dr \quad (17)$$

可以看出,缠绕纤维的质量与缠绕角 α 和纤维厚度 t 有关,因此优化函数可以表述为

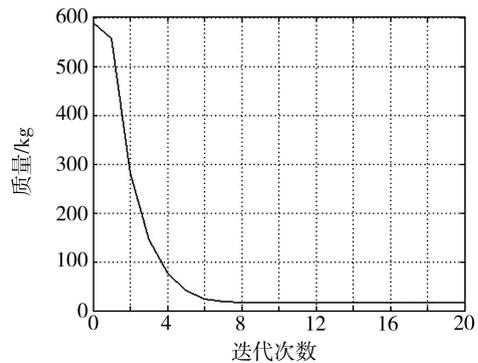
$$\text{Min} [m(\alpha, t)]$$

纤维缠绕的椭球容器需满足强度要求,要求整体不失效,即需要满足蔡-吴失效准则(14)式,(14)式即为目标函数的约束条件。

6.2 优化算法



(a) $r_1 = 100$ mm 时迭代



(b) $r_2 = 150$ mm 时迭代

图8 质量迭代图

Fig.8 Iteration of weight

在极孔半径为 100 mm 的半个椭球壳,得到的优化质量为 17.4847 kg;在极孔半径为 150 mm 的半个椭球,得到的优化质量为 16.5873 kg。由此得到的不等极孔椭球容器的整体优化质量为 34.072 kg。

7 结论

计算出了椭球曲面上不同半径对应的满足强度

序列二次规划算法 (Sequential Quadratic Programming, 简称 SQP) 是处理小规模非线性规划问题最优秀的算法之一,该算法的基本思路如下^[14]:在某个近似解处将原非线性规划问题简化为处理一个二次规划问题,求解最优解,如果有,则认为是原非线性规划问题的最优解,否则,用近似解代替构成一个新的二次规划问题,继续迭代。

此类问题属于有约束的非线性规划优化问题,通过编写程序代码,可得出优化结果。

6.3 优化结果

依据本文研究的不等极孔椭球类容器的相关参数,长轴 $a = 1$ m,短轴 $b = 500$ mm,极孔半径 $r_1 = 100$ mm, $r_2 = 150$ mm,密度 $\rho = 1.45$ g/cm³,通过编写 MATLAB 程序代码,根据目标函数、约束条件,可以得到优化结果(图 8)。

要求的纤维层的最小厚度,其中赤道处的纤维层厚度为 1.281 7 mm。基于得到的纤维层厚度,经过计算得出的纤维方向的应力小于纤维的极限强度 3.92 GPa,纤维缠绕不等极孔椭球容器的应力状态,是赤道处最先发生破坏,且会出现局部失效现象,发现失效的原因与 a/b 的比值有关。

在上述应力计算的基础上,将纤维缠绕的容器质量作为优化目标,蔡-吴失效准则作为约束条件,采用 SQP 优化算法,利用 MATLAB 软件,最终优化后的容器质量为 34.072 kg,达到了优化的目的。

参考文献

[1] Davison C M, Dullin H R, Boliviano A V. Geodesics on the ellipsoid and monodromy[J]. Journal of Geometry and Physics, 2007, 57: 2437-2454

[2] 吴耀楚, 张建华. 测地线 FW 线型的 CAD[J]. 玻璃钢/复合材料, 1991(1): 8-10

[3] 陈汝训. 纤维缠绕气瓶设计分析[J]. 固体火箭技术, 2008, 31(6): 625-634

[4] 王洪运, 马国峰, 赵亮, 等. 等极孔球形压力容器平面缠绕规律[J]. 宇航材料工艺, 2012, 42(3): 17-19

[5] 吴宏伟, 王桂英, 张福成, 等. 圆锥台柱体上的纤维缠绕[J]. 纤维复合材料, 2000, 31(2): 31-35

[6] Zu Lei, Koussios Sotiris, Beukers Adriaan. Design of filament-wound circular toroidal hydrogen storage vessels based on non-geodesic fiber trajectories[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2010, 35: 660-670

[7] 韩振宇, 富宏亚, 王永章, 等. 90°弯管的纤维缠绕线型设计[J]. 玻璃钢/复合材料, 2004(5): 31-32

[8] Zu Lei, Koussios Sotiris, Beukers Adriaan. Design of filament-wound isotensoid pressure vessels with unequal polar openings[J]. Composite Structures, 2010, 92: 2307-2313

[9] 富宏亚, 黄开榜, 朱方群, 等. 非测地线稳定缠绕的边界条件和稳定方程[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 28(2): 125-129

[10] 张德丰. MATLAB 数值分析(第二版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2012: 315-321

[11] 晏飞, 朱纸春. 面向设计的纤维缠绕复合材料压力容器结构分析方法[J]. 强度与环境, 2003, 30(4): 21-26

[12] 张少实. 复合材料与粘弹性力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2007: 26-27

[13] 王耀先. 复合材料力学与结构设计[M]. 上海: 华东理工大学出版社, 2012: 237

[14] 祖磊, 何钦象, 李辅安. 纤维缠绕复合材料圆环壳线型设计与优化[J]. 宇航材料工艺, 2006, 36(3): 14-18

(编辑 李洪泉)

—————
(上接第 18 页)

1.2 署名

1.2.1 署名的意义

作为拥有著作权的声明;表示文责自负的承诺;便于读者同作者的联系。

1.2.2 署名对象

只限于那些参与选定研究课题、制定研究方案、直接参加全部或主要部分研究工作并做出贡献和参加论文撰写同时具有答辩能力的人员。

个人的研究成果,个人署名;集体研究成果,集体署名。可按对研究工作贡献大小排序。可用真实姓名,也可用笔名。

1.2.3 署名位置与格式

通常,科技期刊论文将署名置于题名的下方,并采用如下格式:

作者姓名
(作者工作单位及地址、邮编)

1.3 文摘

1.3.1 文摘的概念与作用

文摘是对论文的内容不加注释和评论的简短陈述。其作用有二:(1)让读者尽快了解论的重要内容,以补充题名的不足;(2)为科技情报人员和计算机检索提供方便。

1.3.2 文摘的分类

(1)报道性文摘

用来反映作者的主要研究成果,向读者提供论文中全部创新内容和其他定量、定性信息。篇幅以 200 ~ 300 字为宜,适合于实验研究和专题研究类论文。

(2)指示性文摘

只简单地介绍文章的主题,并适当介绍某些方法与论据,使读者对其主要内容有个概括的了解。篇幅以 50 ~ 100 字为宜,一般用于综述类文章。

(3)报道-指示性文摘

以报道性文摘表达论文中最有价值的那部分内容,对其余部分内容以指示性语句表达。篇幅以 100 ~ 200 字为宜,一般用于综述或评论性的文章。

(下转第 43 页)