

含细观孔隙 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料弹性模量研究

何济沧¹ 刘齐文¹ 沈强² 刘立胜¹

(1 武汉理工大学新材料力学理论与应用湖北省重点实验室, 武汉 430070)

(2 武汉理工大学材料复合新技术国家重点实验室, 武汉 430070)

文 摘 利用渐近均匀化方法对含细观孔隙 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料(FGM)的弹性模量进行了研究。通过与实验对比,验证了渐近均匀化方法预测含细观孔隙 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料弹性模量的可行性,并在忽略孔隙个数等次要因素的情况下,拟合得到了与孔隙率和 Al₂O₃ 体积分数相关的含细观孔隙 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料弹性模量的预测公式。研究表明:细观孔隙在 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料的弹性模量预测中并不能被忽略。在相同孔隙率下,孔隙的个数对 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料的弹性模量影响较小,而孔隙的大小和位置对弹性模量有着明显的影响,在 Al₂O₃ 的任何体积分数下,Al/Al₂O₃ 梯度功能材料的弹性模量含随机孔隙的均低于均匀分布孔隙的。孔隙率也对 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料的弹性模量有着明显的影响,随着孔隙率的增加,材料的弹性模量逐渐下降,且随 Al₂O₃ 体积分数的增加下降幅度增大。

关键词 梯度功能材料,弹性模量,渐近均匀化,多孔材料

中图分类号:TB34

DOI:10.12044/j.issn.1007-2330.2020.03.003

Elastic Modulus of Al/Al₂O₃ Functionally Gradient Materials Containing Mesoscopic Pores

HE Jicang¹ LIU Qiwen¹ SHEN Qiang² LIU Lisheng¹

(1 Hubei Key Laboratory of Theory and Application of Advanced Materials Mechanics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070)

(2 State Key Lab of Advanced Technology for Materials Synthesis and Processing, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070)

Abstract The elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM with mesoscopic pore was studied by using the method of asymptotic homogenization. The feasibility of the asymptotic homogenization method to predict the elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM with mesoscopic pores was verified by comparison with the experiment. In the case of ignoring the number of pores and other minor factors, the prediction formula of the elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM with mesoscopic pores was obtained by fitting, which is related to porosity and Al₂O₃ volume fraction. The results show that the mesoscopic pores can not be ignored in the prediction of the elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM. Under the same porosity, the number of pores has little influence on the elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM, while the size and location of pores have great influence on the elastic modulus. The elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM with random pores is lower than that of Al/Al₂O₃ FGM with uniform pores under various volume fractions. Porosity also has an obvious influence on the elastic modulus of Al/Al₂O₃ FGM. With the increase of porosity, the elastic modulus of materials gradually decreases, and the greater the volume fraction of Al₂O₃, the greater the decrease.

Key words Functionally gradient materials, Elastic modulus, Asymptotic homogenization, Porous material

0 引言

预测多相复合材料的有效弹性模量一直是一个经典、重要而富有挑战性的问题,在所有与力学相关

的领域都有应用^[1-6]。众所周知,多相复合材料的有效弹性模量不仅取决于各组分相应的弹性性能和体积分数,还与其细观结构有关。

收稿日期:2019-12-24

基金项目:国家自然科学基金重点项目(51932006)

第一作者简介:何济沧,1995年出生,硕士研究生,主要从事梯度功能材料等效力学性能研究工作。E-mail:870806146@whut.edu.cn

Al/Al₂O₃梯度功能材料是一种先进的多相复合材料,由于其具有密度小、耐高温、耐磨损、抗热震等特点,被广泛的应用于现代航天工业中^[7]。Al/Al₂O₃梯度功能材料中各组分材料的弹性模量相差较大,细观结构较为复杂,在制造和运输的过程中还极易产生孔隙,导致其弹性模量的精准预测较为困难,受到了许多专家学者的关注。MOON等^[8]对比了多种预测Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的方法,发现采用适当微观结构形状因子的EMA方法计算的结果更加准确。WANG等^[9]在预测Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的时候发现细观孔隙的影响是不可忽略的。SENTHIL等^[10]利用渐近均匀化方法预测了Al/Al₂O₃梯度功能材料的弹性模量,预测的弹性模量与自洽方法的结果十分接近。

而对于多孔复合结构等效弹性模量的预测,渐近均匀化方法已经经历了20多年的发展。早在1997年,HASSANI等^[11]就已经开始利用渐近均匀化方法对周期性多孔复合结构的力学性能进行了预测。庄守兵等^[12]把渐近均匀化理论应用于多孔材料弹性本构的数值模拟,通过对正方形孔洞蜂窝材料有效模量的计算比较,表明渐近均匀化方法可以得到较准确的有效弹性模量。张斌^[13]利用渐近均匀化理论测定了松质骨的弹性模量,通过多项式拟合得到了表观密度与等效弹性模量之间的数值关系。张新等^[14]利用渐近均匀化方法预测了多孔混凝土的等效弹性模量,计算结果表明随机单胞模型能反映细观的非均匀性,三维均匀化理论计算得到的等效弹性模量变化趋势比较符合试验结果。

目前对Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的研究仅限于完美的Al/Al₂O₃梯度功能材料,而对于Al/Al₂O₃梯度功能材料中真实存在的细观孔隙,研究还相对较少。本文利用渐近均匀化方法在研究多孔复合结构等效力学性能方面的优势,对含细观孔隙Al/Al₂O₃梯度功能材料的弹性模量进行研究,分析细观孔隙的个数、大小、位置和孔隙率对材料弹性模量的影响。最后在忽略孔隙个数等次要因素的情况下,拟合与孔隙率和Al₂O₃体积分数相关的含细观孔隙Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的预测公式。

1 渐进均匀化方法

渐近均匀化方法是利用渐近展开和周期性假设

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^{\varepsilon} \left\{ \begin{aligned} &\varepsilon^{-2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \varepsilon^{-1} \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \\ &+ \left[\left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \varepsilon(\dots) \right] \end{aligned} \right\} d\Omega = \int_{\Omega} f_i^{\varepsilon} v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\Gamma \quad \forall v_i \quad (4)$$

对于任意的 ε , (4)式均成立,所以位移场渐近展

来代替具有快速振荡系数微分方程的一种极限理论。这种方法不仅能计算非均质材料的宏观物理性能,还能对结构进行多尺度分析。目前已经有很多研究将渐近均匀化方法运用到各种不同材料和结构的等效宏观性能预测中。

随着渐近均匀化理论的发展,在渐近均匀化方法中引入了一种更接近于实际情况的局部周期性假设,即假定非均质材料仅在局部区域满足周期性假设,这一假设的引入扩大了渐近均匀化方法的使用范围,使其能解决如梯度功能材料等更为复杂的复合材料等效模量计算^[15]。

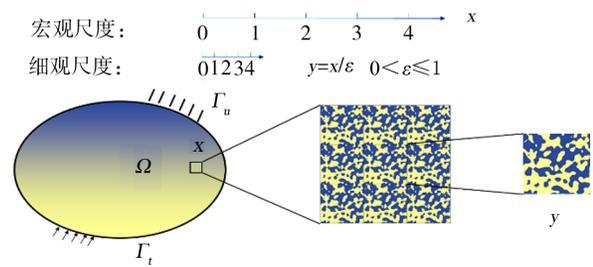


图1 功能梯度结构多尺度模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of multi-scale model of functional gradient structure

图1为一个功能梯度结构,在宏观位置 x 处周围非常小的范围内可认为是由单胞反复堆积形成的周期性结构。单胞的尺度 y 相对于宏观的几何尺寸为小量。对于非均匀的材料来说,宏观结构在外部作用下位移和应力等结构场变量将随宏观位置的变化而改变。同时由于细观上的复杂结构,使得这些结构场变量在宏观位置 x 处非常小的邻域内也会有很大的变化。因此所有的变量都依赖于宏观和细观两种尺度,即:

$$\phi^{\varepsilon}(x) = \phi(x, y) = \phi(x, y + Y) \quad (1)$$

式中,单胞的周期为 Y , y 为细观坐标, x 为宏观坐标, $y=x/\varepsilon$ 。

虚功原理表示的线弹性控制微分方程为:

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^{\varepsilon} \frac{\partial u_k^{\varepsilon}}{\partial x_l} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} f_i^{\varepsilon} v_i d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \hat{\sigma}_i v_i d\Gamma \quad \forall v_i \quad (2)$$

将位移进行渐近展开:

$$u^{\varepsilon}(x) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + \dots \quad (3)$$

将位移的渐进展开式代入虚功原理表示的线弹性控制方程中得:

开的第一项仅依赖于宏观坐标 x ,即 $u_k^0(x, y) = u_k^0(x)$ 。

在 $u^0(x)$ 已知的情况下, 则 $u^1(x, y)$ 可以用 $u^0(x)$ 表示^[16], 即:

$$u_k^1(x, y) = -\chi_k^{pq}(x, y) \frac{\partial u_p^0(x)}{\partial x_q} \quad (5)$$

将式(4)与 ε 相乘, 并取 $\varepsilon \rightarrow 0^+$ 和 $v_i = v_i(y)$, 再将(5)带入得:

$$\int_Y C_{ijkl}^e \frac{\partial \chi_k^{pq}}{\partial y_i} \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY = \int_Y C_{ijpq}^e \frac{\partial v_i(y)}{\partial y_j} dY \quad \forall v_i(y) \quad (6)$$

在确定的 χ_k^{pq} 下, 均匀化的弹性矩阵被求得:

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left(C_{ijkl}^e - C_{ijpq}^e \frac{\partial \chi_p^{kl}}{\partial y_q} \right) dY \quad (7)$$

将细观单胞用有限元方法进行离散得到均匀化问题的有限元形式为:

$$\int_{\Omega^Y} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e \mathbf{B}^e d\Omega^Y \boldsymbol{\chi}^{kle} = \int_{\Omega^Y} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}^e d\Omega^Y \quad (8)$$

式中, e 是单胞 Ω^Y 区域内离散后的单元, \mathbf{D}^e 是单元弹性矩阵, \mathbf{B}^e 是单元应变矩阵, $\boldsymbol{\chi}^{kle}$ 是相应单元的节点位移。

单胞离散后, 可以采用有限元形式对单元宏观结构的弹性性能进行表述:

$$\mathbf{D}^H = \sum_{e=1}^n \frac{V_e}{V} \mathbf{D}^e (\mathbf{I} - \mathbf{B}^e \boldsymbol{\chi}^{kle}) = \sum_{e=1}^n \frac{V_e}{V} (\mathbf{D}^e - \mathbf{S}^e \boldsymbol{\chi}^{kle}) \quad (9)$$

式中, \mathbf{D}^H 是均匀化方法计算所得到的宏观有效弹性矩阵, n 是单胞单元总数, V_e 是单元的体积, \mathbf{D}^e 是单元弹性矩阵, V 是单胞结构的总体积, \mathbf{I} 是单位矩阵, \mathbf{S}^e 是单元应力矩阵。

2 细观模型

对于 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料细观模型的构建, 采用二维高斯函数在单胞区域内随机叠加的方法, 构成细观形貌函数:

$$f(y) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-\left[\frac{(y_1 - y_1^{(i)})^2 + (y_2 - y_2^{(i)})^2}{w_i^2} \right]} \quad (10)$$

式中, N 代表二维高斯函数的叠加次数, 高斯函数中的 $c_i \in [-1, 1]$ 和 $(y_1^{(i)}, y_2^{(i)}) \in Y$ 都为随机数, w_i 是一个取决于 N 的空间宽度:

$$w_i = \frac{l}{\sqrt{N}} \quad (11)$$

式中, l 为单胞宽度。

通过在随机形貌函数上确定截面值 \dot{f} , 当 $f(y) \geq \dot{f}$ 的时候为 $C^{(1)}$ 相, 当 $f(y) < \dot{f}$ 的时候为 $C^{(2)}$ 相, 生成随机分布的两相非均质材料单胞。图 2(a) 是 N 为 800, $C^{(1)}$ 相体积分数为 40% 的单胞, 图 2(b) 为真实 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料细观形貌。后文中所采用的单胞尺寸均为 30 μm 。

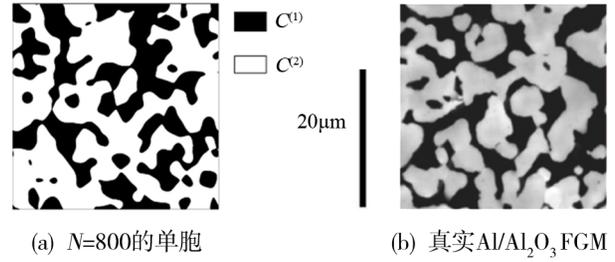


图 2 单胞形貌
Fig. 2 Single cell morphology

实际的 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料中, 孔隙的形状各式各样, 孔隙大小和位置均为随机分布, 为了对孔隙的影响进行定量分析, 假设 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料各细观组分都是理想均匀、各向同性的弹性材料, 采用不同半径的圆孔模拟材料中的孔隙。由于材料的细观结构和随机孔隙的位置、大小均不确定, 为体现结果的一般性, 所有的结果都为生成 10 次随机细观结构计算得到的平均值。图 3 为孔隙率为 10%, Al₂O₃ 体积分数为 40% 的含 9 个随机孔隙的 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料单胞网格模型。

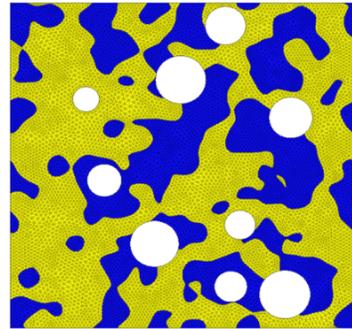


图 3 单胞网格模型
Fig. 3 Single cell grid model

3 结果与讨论

3.1 实验对比

为了验证渐近均匀化方法计算 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料弹性模量的有效性和准确性, 将渐近均匀化方法计算未含细观孔隙的 Al/Al₂O₃ 功能梯度结构得到的弹性模量和文献[8]中实验得到的弹性模量进行对比。均匀化过程中需要的 Al 和 Al₂O₃ 材料弹性参数如表 1 所示。均匀化计算得到的结果如表 2 所示, 渐近均匀化方法求得的等效模量与实验结果趋势相同, 说明渐近均匀化方法预测 Al/Al₂O₃ 梯度功能材料的等效弹性模量是可行的。当 Al₂O₃ 体积分数接近 100% 的时候均匀化计算结果与实验相对误差较小, 仅为 0.25%, 而当 Al₂O₃ 体积分数逐渐减小, Al 和 Al₂O₃ 在细观上交交互结构的时候, 渐近均匀化结果相对于实验的结果误差增大, 最大达到了 10.16%。这一结果可以归结于两个方面的影响:(1)

当Al和Al₂O₃在细观上交形成交互结构的时候,细观结构变得复杂,而每个样品的细观结构又都是不确定的,这将增大梯度功能材料等效弹性模量的预测难度;(2)Al/Al₂O₃梯度功能材料中有许多的细观孔隙,在预测梯度功能材料力学性质的时候,忽略孔隙的存在将会使预测的弹性模量大于实际的弹性模量。

表1 材料参数^[8]

Tab. 1 Material parameters

材料	弹性模量 /GPa	泊松比	体积模量 /GPa	剪切模量 /GPa
Al	69.0	0.33	67.0	26.0
Al ₂ O ₃	390.0	0.2	260.0	150.0

表2 Al/Al₂O₃梯度功能材料均匀化等效模量和实验对比

Tab. 2 Comparison of homogenization equivalent modulus and experiment of Al/Al₂O₃ FGM

V(Al ₂ O ₃) /%	实验结果 ^[8] /GPa	渐近均匀化结果/GPa	相对误差 /%
97	370	370.9	0.25
93	330	346.8	5.09
88	290	318.1	9.69
80	250	275.4	10.16
73	220	241.4	9.70

3.2 细观孔隙对Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的影响

在细观层面上,Al/Al₂O₃梯度功能材料中的孔隙各式各样,为了研究可能的影响因素,利用渐近均匀化方法分别分析了孔隙的个数、位置、大小和孔隙率对含细观孔隙Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的影响。

3.2.1 孔隙数量的影响

图4为孔隙个数对Al/Al₂O₃梯度功能材料均匀化等效模量的影响。结果表明,在孔隙率和孔隙形状

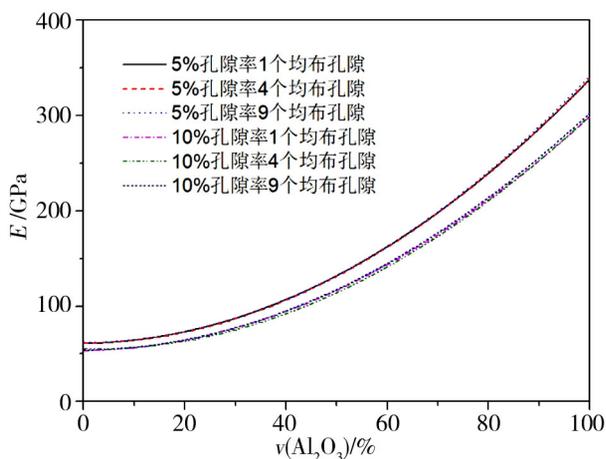


图4 孔隙个数对Al/Al₂O₃梯度功能材料均匀化等效模量的影响

Fig. 4 Influence of the number of pores on the homogenization equivalent modulus of Al/Al₂O₃ FGM

都不变的情况下,孔隙的个数对Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的影响非常小,在任何体积分数下,Al/Al₂O₃梯度功能材料的弹性模量变化均不超过1%。

3.2.2 孔隙位置和大小影响

图5展示了5%和10%孔隙率下孔隙位置和大小对Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的影响。

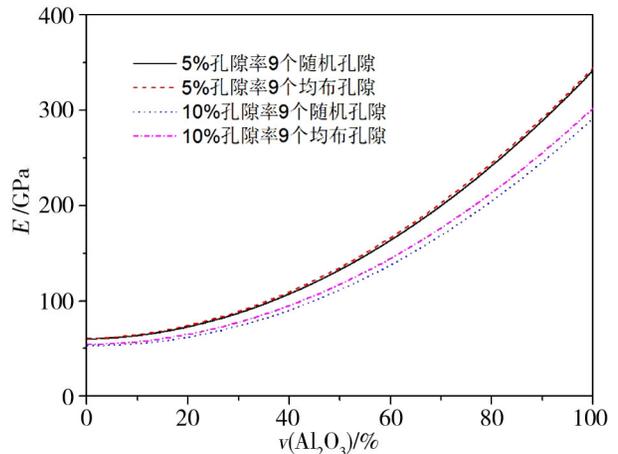


图5 孔隙位置和大小对Al/Al₂O₃梯度功能材料弹性模量的影响

Fig. 5 Influence of pore location and size on the homogenization equivalent modulus of Al/Al₂O₃ FGM

通过比较含9个随机孔隙单元与含9个均匀孔隙单元在不同体积分数下弹性模量发现:在任何体积分数下,弹性模量含均匀孔隙单元的均高于随机孔隙单元的。在孔隙率为10%时,弹性模量含均匀孔隙单元的与随机孔隙单元的差别更大。在孔隙率为10%、Al₂O₃体积分数100%时,弹性模量含均匀孔隙单元的比随机孔隙单元的大10.5 GPa。而在孔隙率为5%时,相同体积分数下弹性模量含均匀孔隙单元的仅比随机孔隙单元的大3.2 GPa。

3.2.3 孔隙率的影响

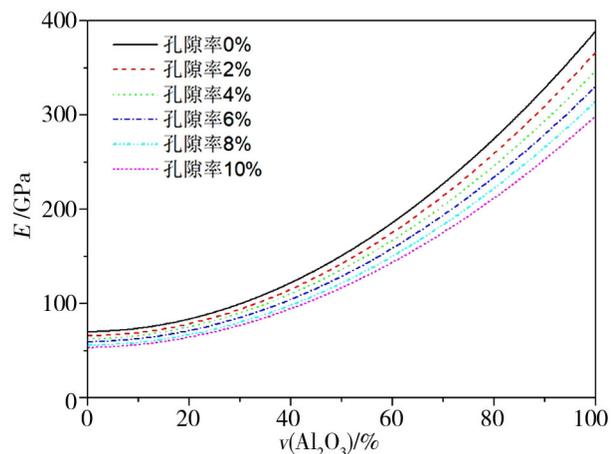


图6 Al/Al₂O₃梯度功能材料不同孔隙率下均匀化等效模量
Fig. 6 Homogenization equivalent modulus of Al/Al₂O₃ FGM with different porosity

在考虑孔隙数量、大小和位置等影响因素的基础上,在不同孔隙率和 Al_2O_3 体积分数的单胞内分别生成9个随机的圆形孔隙,并计算其弹性模量。图6为不同孔隙率下 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的均匀化等效弹性模量。

由图6可知,随着孔隙率的增大,含细观孔隙 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量逐渐下降。随着 Al_2O_3 体积分数的增加, $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料弹性模量下降的幅度越来越大。如 Al_2O_3 体积分数为0时,孔隙率为10.0%的 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料相对于孔隙率为0的仅下降了15.97 GPa,而在 Al_2O_3 体积分数为100%时,孔隙率为10.0%的 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料相对于孔隙率为0的下降了90.78 GPa。

3.3 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料弹性模量预测公式

由于孔隙的数量对 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料弹性模量的影响很小,而实际的 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料内部的孔隙都是随机分布的,利用不同孔隙率和体积分数下含9个随机孔隙单胞的等效弹性模量拟合出了一个关于孔隙率和 Al_2O_3 体积分数的弹性模量预测

$$E = \frac{69.116 + 138.666V - 190.467p + 809.935p^2 - 4608.145p^3}{1 + V - 3.049V^2 + 1.581V^3 + 1.183p - 0.531p^2} \quad (12)$$

式中, V 为 Al_2O_3 的体积分数, p 为孔隙率, E 为弹性模量。公式(12)仅在孔隙率小于10%的情况下有效。

4 结论

基于渐近均匀化方法对含细观孔隙 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量进行了研究,在忽略孔隙个数等次要因素的情况下,拟合得到了与孔隙率和 Al_2O_3 体积分数相关的含细观孔隙的 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料弹性模量的预测公式。并通过分析孔隙个数、大小、位置和孔隙率对梯度功能材料弹性模量的影响得到了以下结论:

(1)预测 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量时,忽略孔隙的影响将会导致预测的弹性模量值偏大;

(2)在相同孔隙率下,孔隙个数对 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量影响不大,孔隙的大小和位置对 $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量有着明显的影响,在各个体积分数下,弹性模量含随机分布孔隙的单胞均小于均匀分布孔隙的单胞;

(3)随着孔隙率的增加, $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 梯度功能材料的弹性模量在任何体积分数下均减小,且下降幅度随着 Al_2O_3 体积分数的增加而变大。

参考文献

[1] 高真,曹鹏,孙新建,等. 基于DIGMAT的混凝土等效弹性模量研究[J]. 水利水电技术,2018,49(5):186-192.

GAO Z, CAO P, SUN X J, et al. Digimat-based study on equivalent elastic modulus of concrete[J]. Water Resources and Aerospace Materials & Technology, 2020, 36(4): 29-32.

公式。图7为弹性模量与孔隙率和 Al_2O_3 体积分数关系的示意图。

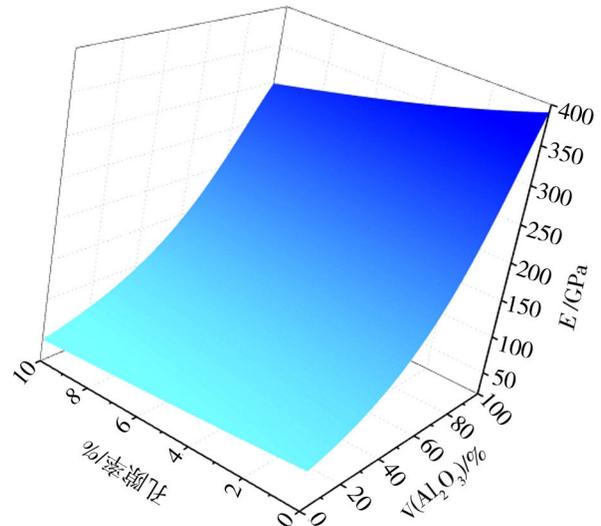


图7 弹性模量与孔隙率和 Al_2O_3 体积分数关系的示意图

Fig. 7 Schematic diagram of relationship between elastic modulus and porosity and Al_2O_3 volume fraction

Hydropower Engineering, 2018, 49(5):186-192.

[2] 谢桂兰,赵锦泉,田杰,等. 均匀化有限元法预测复合材料层合板宏观有效弹性性能[J]. 玻璃钢/复合材料,2014(7):23-27.

XIE G L, ZHAO J X, TIAN J, et al. Predicting macroscopic effective elastic properties of composite laminated plate by homogenization fem [J]. Fiber Reinforced Plastics/Composites, 2014(7):23-27.

[3] 吴林志. 含有随机夹杂非均匀体的有效弹性模量[J]. 应用力学学报,1993,10(2):7-14.

WU L Z. The effective elastic modulus of inhomogeneous media with randomly distributed inclusions [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 1993, 10(2): 7-14.

[4] 庞宝君,曾涛,杜善义. 三维多向编织复合材料有效弹性模量的细观计算力学分析[J]. 计算力学学报,2001,18(2):231-234.

PANG B J, ZENG T, DU S Y. Meso-scopeic computing mechanics analysis of three-dimensional multi-directional braided composites [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(2): 231-234.

[5] 黄涛,矫桂琼,高峰,等. 基于均匀化方法的缝层层压板拉伸弹性模量有限元预测[J]. 宇航材料工艺,2006,36(4):29-32.

HUANG T, JIAO G Q, GAO F, et al. Predicting method for tensile modulus of stitching laminate by finite element analysis [J]. Aerospace Materials & Technology, 2006, 36(4): 29-32.

[6] 刘文庆,姜秉元. 对称复合材料层板弹性模量和泊松

比的计算[J]. 宇航材料工艺, 2003, 33(3): 53-56.

LIU W Q, JIANG B Y. Calculation of elastic modulus and poisson's ratio of symmetrical composite laminates [J]. Aerospace Materials & Technology, 2003, 33(3): 53-56.

[7] 周正, 张力, 丁培道. Al/Al₂O₃陶瓷基复合材料的研究进展[J]. 材料导报, 2000, 14(6): 64-66.

ZHOU Z, ZHANG L, Ding P D. Progress in research on Al/Al₂O₃ ceramic matrix composites [J]. Materials Review, 2000, 14(6): 64-66.

[8] MOON R J, TILBROOK M, HOFFMAN M, et al. Al-Al₂O₃ Composites with interpenetrating network structures: composite modulus estimation [J]. Journal of the American Ceramic Society, 2005, 88(3): 666-674.

[9] WANG M, PAN N. Elastic property of multiphase composites with random microstructures [J]. Journal of Computational Physics, 2009, 228(16): 5978-5988.

[10] VEL S S, GOUPEE A J. Multiscale thermoelastic analysis of random heterogeneous materials: part I: microstructure characterization and homogenization of material properties [J]. Computational Materials Science, 2010, 48(1): 22-38.

[11] HASSANI B, HINTON E. A review of homogenization and topology optimization I—homogenization theory for media with periodic structure [J]. Computers & Structures, 1998, 69(6): 707-717.

[12] 庄守兵, 吴长春, 冯森林, 等. 基于均匀化方法的多孔材料细观力学特性数值研究[J]. 材料科学与工程, 2001, 19

(4): 9-13.

ZHUANG S B, WU C C, FENG M L, et al. Microscopic investigation of cellular materials mechanical properties based on homogenization theory [J]. Materials Science and Engineering, 2001, 19(4): 9-13.

[13] 张斌. 渐进均匀化理论及其在松质骨弹性模量计算中的应用[D]. 武汉: 华中科技大学, 2011.

ZHANG B. Asymptotic expansion homogenization and its applications in elastic modulus of cancellous bone [D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2011.

[14] 张新, 程华, 王仲刚, 等. 三维均匀化理论预测多孔混凝土等效弹性模量[J]. 后勤工程学院学报, 2015(3): 87-92.

ZHANG X, CHENG H, WANG Z G, et al. Prediction of equivalent elastic modulus of porous concrete through 3d homogenization theory [J]. Journal of Logistical Engineering University, 2015(3): 87-92.

[15] GOUPEE A J, VEL S S. Transient multiscale thermoelastic analysis of functionally graded materials [J]. Composite Structures, 2010, 92(6): 1372-1390.

[16] 董其伍, 王哲, 刘敏珊. 渐进均匀化理论研究复合材料有效力学性能[J]. 材料科学与工程学报, 2008, 26(1): 72-75.

DONG Q W, WANG Z, LIU M S. Asymptotic homogenization theory for composites: effective mechanics properties [J]. Journal of Materials Science and Engineering, 2008, 26(1): 72-75.